Zeitreihenökonometrie

Übungsaufgaben – Blatt 10

1. **Aufgabe** *(Konsistenz bei autokorrelierten Fehlern)*

Betrachten Sie folgendes Modell

$$y_t = \beta x_t + u_t, \quad t = 1, 2, \ldots, T,$$

wobei

$$x_t = \alpha x_{t-1} + e_t, \quad e_t \sim WN(0, \sigma_e^2)$$

ein schwach stationärer Prozess ist und die Fehler u_t und e_t kontemporär korreliert sind, da

$$u_t = \rho e_t + \zeta_t, \quad \zeta_t \sim WN(0, \sigma^2), \quad Cov(e_s, \zeta_t) = 0 \text{ für alle } s \leq t.$$

(a) Leiten Sie folgende Ergebnisse her:

i. (1 Punkt) $Var(u_t) = \rho^2\sigma_e^2 + \sigma^2$,

ii. (1 Punkt) $Cov(u_t, e_t) = \rho\sigma_e^2$,

iii. (2 Punkte) $Var(x_t) = \frac{\sigma_e^2}{1-\alpha^2}$.

Außerdem kann gezeigt werden (hier nicht verlangt), dass $E[u_t|x_t] = \rho \cdot (1-\alpha^2)x_t$ gilt.

(b) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass der OLS-Schätzer für β auf folgende Arten geschrieben werden kann:

$$\begin{aligned}\hat{\beta} &= \beta + \frac{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^T x_t u_t}{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^T x_t^2} \\ &= \beta + \frac{\alpha\rho\frac{1}{T}\sum_{t=1}^T x_{t-1}e_t + \rho\frac{1}{T}\sum_{t=1}^T e_t^2 + \frac{1}{T}\sum_{t=1}^T x_t\zeta_t}{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^T x_t^2}.\end{aligned}$$

(c) Zeigen Sie zudem, dass:

i. (2 Punkte) $\operatorname{plim}_{T\to\infty} \frac{1}{T}\sum_{t=1}^T x_{t-1}e_t = 0$,

ii. (1 Punkt) $\operatorname{plim}_{T\to\infty} \frac{1}{T}\sum_{t=1}^T e_t^2 = \sigma_e^2$,

iii. (2 Punkte) $\operatorname{plim}_{T\to\infty} \frac{1}{T}\sum_{t=1}^T x_t\zeta_t = 0$,

iv. (2 Punkte) $\operatorname{plim}_{T\to\infty} \frac{1}{T}\sum_{t=1}^T x_t^2 = \frac{\sigma_e^2}{1-\alpha^2}$.

(d) (2 Punkte) Leiten Sie folgendes Ergebnis her

$$\operatorname*{plim}_{T\to\infty} \hat{\beta} = \beta + \rho(1-\alpha^2)$$

und interpretieren Sie dieses. Welche Annahmeverletzung führt hier zu diesem Ergebnis?

2. **Aufgabe** *(spurious regression)*

(3 Punkte) Laden Sie den Datensatz `allesrandom.txt` herunter. Plotten Sie in R zunächst die beiden stochastischen Prozesse $\{x_t\}$ und $\{y_t\}$ und kommentieren Sie die Plots.

Schätzen Sie anschließend folgende Regressionsmodelle

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_t + u_t \tag{1}$$

und

$$\Delta y_t = \gamma_0 + \gamma_1 y_{t-1} + \gamma_2 x_{t-1} + \gamma_3 \Delta x_t + e_t. \tag{2}$$

Welche Schlussfolgerungen ziehen Sie aus den Schätzergebnissen hinsichtlich eines möglichen Zusammenhangs zwischen y_t und x_t? Begründen Sie Ihre Antwort sorgfältig.

3. **Aufgabe** *(Dynamisch vollständige Spezifikation)*

(3 Punkte) Zeigen Sie, dass TS.5' für dynamisch vollständig spezifizierte Modelle gilt.

Gehen Sie dabei von folgendem Modell aus, das TS.3' erfülle,

$$y_t = \mathbf{x}_t \boldsymbol{\beta} + u_t \qquad u_t \sim (0, \sigma^2),$$

wobei $\mathbf{x}_t$ kontemporäre und verzögerte Regressoren enthalten kann und zeigen Sie dann, dass TS.5'

$$\mathrm{Cov}(u_t, u_s | \mathbf{x}_t, \mathbf{x}_s) = 0, \quad \text{bzw.} \quad E[u_t u_s | \mathbf{x}_t, \mathbf{x}_s] = 0 \quad \text{für alle } t \neq s$$

aus

$$E[y_t | \mathbf{x}_t, y_{t-1}, \mathbf{x}_{t-1}, y_{t-2}, \ldots] = E[y_t | \mathbf{x}_t]$$

folgt.