Fortgeschrittene Ökonometrie

Fragenkatalog - Stand: 19.5.2020[1]

Dieser Katalog umfasst 41 Seiten und besteht aus 45 Aufgaben mit insgesamt 819 Punkten.

Aufgabenübersicht

[1] Benutzerhinweise: Dieser Katalog darf für den individuellen Gebrauch und für Unterrichtszwecke, jedoch nicht für den kommerziellen Gebrauch gedruckt und reproduziert werden. Dozenten dürfen die Aufgaben online an Hochschulen, entweder zum individuellen Nutzen oder für dozentenbegleiteten Unterricht nutzen. Darüber hinaus wird ihnen gestattet, Kopien einer begrenzten Anzahl von Seiten für Studenten (nicht als Teil eines Lehrbuchs) zu erstellen, wobei folgendes Urheberzeichen auf jeder Kopie erscheinen muss:

Ich danke Roland Weigand und Stefan Rameseder fur ihre Zuarbeiten, wichtigen Korrekturen und substantiellen Verbesserungsvorschläge sehr herzlich.

1. Aufgabe (36 Punkte) NLS: (**Das Michaelis-Menten Modell**)

Das Michaelis-Menten-Modell wird zum Beispiel für die Untersuchung von klinischen Dosis-Wirkungs-Zusammenhängen verwendet. Es ist durch folgendes nichtlineares Regressionsmodell gegeben:

$$y_t = \beta_1 + \frac{\beta_2 x_t}{x_t + \beta_3} + u_t, \quad u_t|x_t \sim IID(0, \sigma^2), \quad t = 1, 2, \ldots, n. \tag{1}$$

(a) (3 Punkte) Geben Sie $x_t(\boldsymbol{\beta})$ und $\boldsymbol{X}_t(\boldsymbol{\beta})$ an. Berechnen Sie dann die Taylorapproximation 2. Ordnung von $x_t(\boldsymbol{\beta})$ an der Stelle $\boldsymbol{\beta}_0$. Diese Taylorapproximation ist gegeben durch

$$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}) \approx f(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})^T\boldsymbol{a} + \frac{1}{2}\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{a},$$

wobei $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{w})$ den Gradientenvektor $\left.\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{w}}$ und $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{w})$ die Hessematrix $\left.\frac{\partial^2 f}{\partial \boldsymbol{x}\partial \boldsymbol{x}^T}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{w}}$ an der Stelle $\boldsymbol{w}$ bezeichnen.

(b) (3 Punkte) Berechnen Sie die ersten beiden Ableitungen der Fehlerquadratsumme $Q(\boldsymbol{\beta}) = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}(y_t - x_t(\boldsymbol{\beta}))^2$ nach $\boldsymbol{\beta}$. Stellen Sie diese sowohl in Summen- als auch in Matrixschreibweise dar.

Sie wollen $\boldsymbol{\beta}$ mittels nichtlinearem Momentenschätzer $\tilde{\boldsymbol{\beta}}$ schätzen. Dieser ist gegeben durch die Momentenbedingung $\boldsymbol{W}^T(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}(\tilde{\boldsymbol{\beta}})) = \boldsymbol{0}$.

(c) (1 Punkt) Welche Dimension weist $\boldsymbol{W}$ auf?

(d) (2 Punkte) Ein Kollege schlägt vor, $\boldsymbol{W}_t = (1\ x_t\ 5x_t)$ zu wählen. Was entgegnen Sie ihm?

(e) (2 Punkte) Für welche Werte von $\boldsymbol{\beta}_0$ ist die asymptotische Identifikation für beliebige Instrumente $\boldsymbol{W}_t$ verletzt?

(f) (3 Punkte) Skizzieren Sie kurz die Herleitung der asymptotischen Verteilung von $\tilde{\boldsymbol{\beta}}$ für gegebene Instrumentenmatrix $\boldsymbol{W}$ unter geeigneten Annahmen.

(g) (2 Punkte) Beschreiben Sie, wie Sie aufbauend auf $\tilde{\boldsymbol{\beta}}$ einen effizienten Schätzer für $\boldsymbol{\beta}$ aus (1) konstruieren können.

Sie wollen für das Modell (1) nichtlineare KQ-Schätzung durchführen. Es bezeichne $\boldsymbol{x} = (x_1\ x_2\ \ldots\ x_n)^T$. Die Zielfunktion lautet hier

$$Q(\boldsymbol{\beta}|\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) = \frac{1}{n}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}(\boldsymbol{\beta}))^T(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}(\boldsymbol{\beta})). \tag{3}$$

(h) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass unter den üblichen Annahmen und der zusätzlichen Annahme einer Zufallsstichprobe gilt, dass

$$E\left[\left.\frac{\partial^2 Q(\boldsymbol{\beta};\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})}{\partial\boldsymbol{\beta}\partial\boldsymbol{\beta}^T}\right|_{\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}_0}\right] = 2E\left[\mathbf{X}_t(\beta_0)^T\mathbf{X}_t(\beta_0)\right] \quad \text{und}$$

$$\operatorname{plim}\left(\left.\frac{\partial^2 Q(\boldsymbol{\beta};\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})}{\partial\boldsymbol{\beta}\partial\boldsymbol{\beta}^T}\right|_{\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}_0}\right) = 2\boldsymbol{E}\left[\mathbf{X}_t^T(\beta_0)\mathbf{X}_t(\beta_0)\right].$$

Was ändert sich, wenn Sie $x_t,\ t = 1, \ldots, n$ als feste (nichtstochastische) Werte betrachten?

(i) (4 Punkte) Es bezeichne $\boldsymbol{\theta} := (\beta_1;\ \beta_2)^T$. Geben Sie für gegebenes (festes) β_3 den Schätzer $\breve{\boldsymbol{\theta}}(\beta_3)$ an, der die Residuenquadratsumme (3) minimiert. Geben Sie dann die zentrierte Zielfunktion

$$Q^z(\beta_3|\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) = Q\left((\breve{\boldsymbol{\theta}}(\beta_3),\ \beta_3)^T|\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}\right)$$

an.

(j) (4 Punkte) Verwenden Sie nun den Datensatz `dose_data.csv`, indem neben der verabreichten Dosis `dose` eines Medikaments auch ein Maß der Wirkung `response` zu finden ist. Erläutern Sie den folgenden R-Code. Gehen Sie dabei auf den praktischen Nutzen von $Q^z(\beta_3;\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$ ein.

```
data <- read.csv("dose_data.csv")

Qz <- function(b3,data){
est_lin <- lm(response~I(dose/(dose+b3)),data=data)
u <- est_lin$resid
sum(u^2)
}

b3_seq <- seq(-4,4,0.05)
Qz <- Vectorize(Qz,"b3")
plot(b3_seq, Qz(b3_seq, data=data),
  type="l",
  xlab=expression(beta[3]),
  ylab=expression(Q^z(beta[3])))

min_Qz <- optimize(Qz, interval=c(-3,3), data=data)
min_Qz
```

(k) (3 Punkte) Berechnen Sie den nichtlinearen KQ-Schätzer $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ mithilfe der `nls()` Funktion. Versuchen Sie verschiedene Startwerte bei der Optimierung, etwa $\boldsymbol{\beta}_{(0)} = (1,\ -1,\ -1)^T$, $\boldsymbol{\beta}_{(0)} = (1,\ -1,\ 1)^T$ und $\boldsymbol{\beta}_{(0)} = (1,\ -1,\ 0)^T$.

(l) (3 Punkte) Eine Verallgemeinerung des Michaelis-Menten-Modells stellt die sogenannte EMAX-Spezifikation dar.

$$response_t = \beta_1 + \frac{\beta_2 dose_t^\gamma}{dose_t^\gamma + \beta_3^\gamma}$$

Schätzen Sie dieses Modell und zeichnen Sie die Regressionsfunktion in den Scatterplot ein. Testen Sie, ob die Michaelis-Menten-Spezifikation abgelehnt wird.

(m) (3 Punkte) Es wurden zwei verschiedene Stoffe verabreicht. Unterscheiden sie nun zwischen diesen bei der Schätzung, d.h. schätzen Sie

$$response_t = \beta_1 + \frac{\beta_2 dose1_t}{dose1_t + \beta_3} + \frac{\beta_4 dose2_t}{dose2_t + \beta_5}$$

Erzeugen Sie wieder eine Graphik. Testen Sie mittels Wald-Test, ob die beiden Medikamente eine unterschiedliche Wirkung entfalten.[2]

[2]Hinweis: Dieser Test kann etwa mithilfe der Funktion 'linearHypothesis' aus dem 'car' Paket durchgeführt werden.

2. Aufgabe (11 Punkte) NLS: (**Nichtlinearer F-Test**)

Sie sollen nun zeigen, dass für ein nichtlineares Regressionsmodell $y_t = x_t(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2) + u_t$ unter der Nullhypothese $H_0 : \boldsymbol{\beta}_2 = 0$ und geeigneten Annahmen gilt, dass $rF \xrightarrow{d} \chi^2_r$. F ist die übliche F-Statistik

$$F = \frac{(SSR_{H_0} - SSR_{H_1})/r}{SSR_{H_1}/(n-k)},$$

$r = k_2$ ist die Anzahl der Elemente in $\boldsymbol{\beta}_2$. Es bezeichne ferner

$$\boldsymbol{X} := \left.\frac{\partial \boldsymbol{x}(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}^T}\right|_{\boldsymbol{\beta}_0}, \quad \boldsymbol{X}_1 := \left.\frac{\partial \boldsymbol{x}(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T}\right|_{\boldsymbol{\beta}_0}, \quad \boldsymbol{X}_2 := \left.\frac{\partial \boldsymbol{x}(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}_2^T}\right|_{\boldsymbol{\beta}_0}, \quad \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{Z}} = \boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Z}^T\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{Z}^T,$$

sowie $\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{Z}} = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{Z}}$.

Hinweis: Lesen Sie ggf. nochmal die relevanten Abschnitte in Methoden der Ökonometrie sowie Davidson, McKinnon (2004, pp. 154, 243).

(a) (3 Punkte) Was passiert in großen Stichproben mit dem Nenner der F-Statistik?

(b) (4 Punkte) Unter H_0 gilt $SSR_{H_0} \overset{a}{=} \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{X}_1}\boldsymbol{u}$ und $SSR_{H_1} \overset{a}{=} \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{u}$, vgl. Aufgabe 6.8 aus Davidson und MacKinnon (2004). Wegen $\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{X}_1} - \boldsymbol{M}_{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{X}_1} = \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{X}_1}\boldsymbol{X}_2}$ (vgl. Aufgabe 2.19) ergibt sich

$$SSR_{H_0} - SSR_{H_1} \overset{a}{=} \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{X}_1}\boldsymbol{X}_2}\boldsymbol{u}.$$

Finden Sie den Grenzwert bzw. die asymptotische Verteilung einzelner Faktoren dieses Terms.

(c) (4 Punkte) Wenden Sie das Continuous Mapping Theorem an, um die asymptotische Verteilung von rF zu erhalten.

3. Aufgabe (5 Punkte) NLS: (**Identifikation im nichtlinearen Regressionsmodell**)

Gegeben sei das nichtlineare Regressionsmodell

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 x_t^{\beta_3} + u_t, \qquad \mathrm{E}[u_t|x_t] = 0, \qquad x_t > 0, \qquad t = 1, \ldots, n. \tag{5}$$

(a) (2 Punkte) Schlagen Sie einen anwendbaren Momentenvektor vor, um die Parameter mit der Momentenmethode zu schätzen. Wie steht es um seine Effizienz?

(b) (2 Punkte) Geben Sie zwei Parameterkonstellationen $\boldsymbol{\beta}_0 = \begin{pmatrix} \beta_{10} & \beta_{20} & \beta_{30} \end{pmatrix}^T$ an, die asymptotisch nicht identifizierbar sind.

(c) (1 Punkt) Geben Sie ein Szenario an, bei dem die Identifikation in der Stichprobe scheitert.

4. Aufgabe (8 Punkte) NLS: (**Momentenschätzung und nichtlineare KQ-Methode**)

Betrachten Sie das Modell

$$y_t = \mathrm{e}^{x_t\beta} + u_t, \qquad \mathrm{E}[u_t|x_t] = 0, \qquad \mathrm{Var}\,(u_t|x_t) = \sigma^2, \qquad t = 1, 2, \ldots, n. \tag{6}$$

(a) (3 Punkte) Bestimmen Sie für eine nichtlineare Momentenschätzung das optimale Instrument w_t für den Fall $\beta_0 = 0$.

(b) (2 Punkte) Geben Sie die Residuenquadratsumme als Funktion $SSR(\beta|\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ an. Berechnen Sie die erste und zweite Ableitung nach β.

(c) (3 Punkte) Sie wollen den nichtlinearen KQ-Schätzer berechnen. Berechnen Sie unter Verwendung der Newton-Raphson-Methode für gegebene x_t, y_t, $t = 1, \ldots, n$, und Startwert $\beta_{(0)} = 0$ den ersten Iterationswert $\beta_{(1)}$.

5. Aufgabe (17 Punkte) NLS: (**Nichtlineare Regression** - Modell 1)

Betrachten Sie das Regressionsmodell

$$y_t = \beta^2 + \beta x_t + u_t \qquad \text{mit} \quad \mathrm{E}[u_t|x_t] = 0, \qquad \mathrm{Var}\,(u_t|x_t) = \sigma^2 \tag{7}$$

wobei eine Zufallsstichprobe vorliegt und die arithmetischen Mittel der Daten durch $\bar{x} = 2$ und $\bar{y} = -1$ gegeben sind.

(a) (2 Punkte) Berechnen Sie den Momentenschätzer für β unter Verwendung des Instruments $\boldsymbol{W}_t = 1$ für $t = 1, \ldots, n$.

(b) (2 Punkte) Berechnen Sie $\boldsymbol{X}_t(\beta)$.

(c) (2 Punkte) Geben Sie die Momentenbedingung für einen effizienten zweistufigen Momentenschätzer an.

(d) (3 Punkte) Geben Sie die Zielfunktion an, die der nichtlineare KQ-Schätzer minimiert. Berechnen Sie auch die erste und zweite Ableitung dieser Zielfunktion nach β.

(e) (3 Punkte) Sie wollen den nichtlinearen KQ-Schätzer berechnen und verwenden das Newton-Verfahren. Berechnen Sie, ausgehend vom Momentenschätzer aus a) den ersten Schritt der nichtlinearen Minimierung in Abhängigkeit der Daten (x_t, y_t).

(f) (5 Punkte) Ein Kollege schlägt vor, den folgenden Schätzer zu verwenden:

$$\hat{\beta}_{OLS} = \frac{\sum_{t=1}^{n}(x_t - \bar{x})(y_t - \bar{y})}{\sum_{t=1}^{n}(x_t - \bar{x})^2}.$$

Es gilt

$$\sqrt{n}(\hat{\beta}_{OLS} - \beta_0) \xrightarrow{d} N\left(0; \frac{\sigma^2}{\mathrm{Var}\,(x_t)}\right).$$

Zeigen Sie für $\beta_0 = 1$ und $E(x_t) = 0$, dass der nichtlineare KQ-Schätzer asymptotisch effizienter ist als $\hat{\beta}_{OLS}$.

6. Aufgabe (16 Punkte) NLS: (**Nichtlineare Regression** - Modell 2)

Betrachten Sie das Modell

$$y_t = \beta_1 + \mathrm{e}^{\beta_2 x_t} + u_t, \qquad \text{mit} \quad \mathrm{E}[u_t|x_t] = 0, \qquad \mathrm{Var}\,(u_t|x_t) = \sigma^2$$

und wahrem Parameterwert $\boldsymbol{\beta}_0$ und $x_t \in \Omega_t$.

(a) (2 Punkte) Geben Sie $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\beta})$ und $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{\beta})$ an.

(b) (1 Punkt) Wieviele Momentenbedingungen sind nötig, um $\boldsymbol{\beta}$ zu identifizieren?

(c) (1 Punkt) Geben Sie für gegebene Instrumente $\boldsymbol{W}_t \in \Omega_t$ die theoretischen Momentenbedingungen an, die der nichtlinearen Momentenschätzung von $\boldsymbol{\beta}$ zugrundeliegen.

(d) (1 Punkt) Geben Sie für $n = 4$ eine Wahl für $\boldsymbol{W}$ an, für die die Identifikation von $\boldsymbol{\beta}$ scheitert.

(e) (1 Punkt) Geben Sie für $n = 4$ einen Stichprobenvektor $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ an, für den die Identifikation von $\boldsymbol{\beta}$ scheitert.

(f) (1 Punkt) Gibt es einen Parametervektor $\boldsymbol{\beta}_0$, für den die Identifikation von $\boldsymbol{\beta}$ scheitert?

(g) (2 Punkte) Ist in den Teilaufgaben d) bis f) jeweils die Identifikation in der Stichprobe oder die asymptotische Identifikation betroffen?

(h) (1 Punkt) Geben Sie die optimale Instrumentenmatrix in Abhängigkeit von $\boldsymbol{\beta}_0$ an.

(i) (3 Punkte) Berechnen Sie die Bedingungen erster Ordnung für den nichtlinearen KQ-Schätzer für das vorliegende Modell in Summenschreibweise.

(j) (3 Punkte) Sie gehen davon aus, dass alle Standardannahmen erfüllt sind und erhalten für eine Stichprobe mit $n = 100$ die Schätzwerte $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (0.400,\ 1.200)^T$, $\hat{\sigma}^2 = 0.600$, und

$$\sum_{t=1}^{n} \boldsymbol{X}_t(\hat{\boldsymbol{\beta}})^T \boldsymbol{X}_t(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \begin{pmatrix} 100 & 50 \\ 50 & 200 \end{pmatrix}.$$

Testen Sie die Nullhypothese $H_0:\ \beta_2 = 1$ gegen $H_1:\ \beta_2 \neq 1$.

7. Aufgabe (19 Punkte) NLS: **Log(beta)**

Betrachten Sie für $\beta > 0$ das Regressionsmodell

$$y_t = \log(\beta)x_t + u_t \qquad \text{mit} \quad \mathrm{E}[u_t|x_t] = 0, \qquad \mathrm{E}[u_t^2|x_t] = \sigma^2. \tag{8}$$

(a) (2 Punkte) Geben Sie $x_t(\beta)$ und $\boldsymbol{X}_t(\beta)$ für dieses Modell an.

(b) (2 Punkte) Geben Sie das optimale Instrument für den nichtlinearen Momentenschätzer von β an. Ist der optimale Momentenschätzer hier anwendbar?

(c) (3 Punkte) Sie wollen den nichtlinearen KQ-Schätzer berechnen. Geben Sie dessen Bedingung erster Ordnung an.

(d) (4 Punkte) Sie starten mit $\beta_{(0)} = 1$ einen iterativen Gauss-Newton Algorithmus. Berechnen Sie $\beta_{(1)}$.

(e) (3 Punkte) Berechnen Sie den Standardfehler von $\hat{\beta}_{NLS}$ nur in Abhängigkeit der Daten und von $\hat{\beta}_{NLS}$.

Sie haben das Modell (8) mit der nls() Funktion in **R** geschätzt und erhalten folgenden Output.

```
--------------------------------------------------------------
Formula: y ~ log(beta) * x

Parameters:
     Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
beta   1.1841     0.1059   11.18   <2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 *** 0.001 ** 0.01 * 0.05 . 0.1   1

Residual standard error: 0.861 on 99 degrees of freedom

Number of iterations to convergence: 3
Achieved convergence tolerance: 3.775e-09
---------------------------------------------------------------
```

Es ist außerdem bekannt, dass $\sum_{t=1}^{n} y_t^2 = 76.0378$. Sie wollen die Nullhypothese
H_0 : **"$\boldsymbol{x}$ hat keinen Einfluss auf $\boldsymbol{y}$"** testen.

(f) (2 Punkte) Führen Sie den t-Test zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ durch.

(g) (3 Punkte) Führen Sie für dieselbe Nullhypothese einen nichtlinearen F-Test durch.

8. Aufgabe (10 Punkte) NLS: (**Nichtlineare Regression** - Modell 3)

Betrachten Sie das Modell

$$y_t = \mathrm{e}^{\beta_1 + \beta_2 x_t} + u_t, \qquad u_t|\Omega_t \sim IID(0;\sigma^2), \qquad t = 1, \ldots, n,$$

mit wahrem Parameterwert $\boldsymbol{\beta}_0 = (\beta_{01},\ \beta_{02})^T$ und $x_t \in \Omega_t$.

(a) (1 Punkt) Geben Sie $\boldsymbol{x}_t(\boldsymbol{\beta})$ und $\boldsymbol{X}_t(\boldsymbol{\beta})$ an.

(b) (1 Punkt) Unter welcher Voraussetzung ist im Rahmen des gegebenen Modells $\boldsymbol{W}_t = (1,\ x_t)$ das optimale Instrument? Begründen Sie ihre Antwort.

(c) (3 Punkte) Leiten Sie für das allgemeine Modell $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{\beta}) + \boldsymbol{u}$ mithilfe des Mittelwertsatzes (Taylor's Theorem) aus der empirischen Momentenbedingung des nichtlinearen Momentenschätzers $\hat{\boldsymbol{\beta}}_W$ einen Ausdruck für $\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_W - \boldsymbol{\beta})$ her, der den Fehlerterm $\boldsymbol{u}$ beinhaltet.

(d) (3 Punkte) Ihnen liegt eine Stichprobe mit $n = 200$ Beobachtungen vor, mit der Sie den NLS-Schätzer mit dem **Gauss-Newton**-Verfahren berechnen wollen. Berechnen Sie gegeben $\boldsymbol{\beta}_{(0)} = \mathbf{0}$ den ersten Iterationsschritt $\boldsymbol{\beta}_{(1)}$.

Hinweise:

$$\sum_{t=1}^{n} x_t = 426, \quad \sum_{t=1}^{n} x_t^2 = 1521, \quad \sum_{t=1}^{n} y_t = 201, \quad \sum_{t=1}^{n} x_t y_t = 583,$$

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

(e) (2 Punkte) Nennen Sie kurz zwei Probleme, die bei der Berechnung des NLS-Schätzers mit dem Newton-Verfahren auftreten können. Illustrieren Sie diese anhand einer Skizze für $k = 1$.

9. Aufgabe (21 Punkte) NLS: (**Nichtlineare Regression** - Modell 4)

Betrachten Sie das Modell

$$y_t = \frac{1}{\beta} x_{t1} + \beta x_{t2} + u_t, \qquad \text{mit} \quad \mathrm{E}(u_t|x_t) = 0, \qquad \mathrm{Var}\left(()\, u_t|x_t\right) = \sigma^2$$

und wahrem Parameterwert $\beta_0 \neq 0$ und $x_{t1}, x_{t2} \in \Omega_t$.

(a) (2 Punkte) Geben Sie $\boldsymbol{x}(\beta)$ und $\boldsymbol{X}(\beta)$ an.

(b) (2 Punkte) Geben Sie für gegebenes Instrument $\boldsymbol{W}_t \in \Omega_t$ die theoretische Momentenbedingung an, die der nichtlinearen Momentenschätzung zugrunde liegt.

(c) (1 Punkt) Geben Sie das optimale Instrument in Abhängigkeit von β_0 an.

(d) (2 Punkte) Geben Sie die Zielfunktion $SSR(\beta; \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$ des nichtlinearen KQ-Schätzers für das gegebene Modell an.

Die Stichprobe ist durch folgende Werte bestimmt:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \frac{1}{\beta} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \beta + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \\ x_{41} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \\ x_{42} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(e) (2 Punkte) Ist der Momentenschätzer mit $\boldsymbol{W}_t = x_{t2}$ in der vorliegenden Stichprobe identifiziert? Begründung!

(f) (3 Punkte) Berechnen Sie den Momentenschätzer mit $\boldsymbol{W}_t = x_{t1}^2$.

(g) (4 Punkte) Berechnen Sie den nichtlinearen KQ-Schätzer. Berechnen Sie hierfür zunächst die Bedingung erster Ordnung für ein Minimum von $SSR(\beta|\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$ für die gegebene Stichprobe

(h) (2 Punkte) Geben Sie einen Schätzer für die Varianz des nichtlinearen KQ-Schätzers an.

(i) (3 Punkte) Es sei $SSR_{H_1} = 799/196$. Testen Sie die Hypothese $H_0: \ \beta = 4$ mit einem nichtlinearen F-Test.

10. Aufgabe (17 Punkte) NLS: (**CES-Produktionsfunktion**)

Ziel der Aufgabe ist die Schätzung einer nichtlinearen CES-Produktionsfunktion, die in logarithmierter Regressionsform als

$$\log(Y_t) = \log(\gamma) - \frac{\lambda}{\rho} \log\left(\delta L_t^{-\rho} + (1-\delta) K_t^{-\rho}\right) + u_t, \qquad \mathrm{E}(u_t|\Omega_t) = 0, \tag{9}$$

dargestellt werden kann. Dabei ist Y_t die Produktionsmenge, L_t die eingesetzten Arbeitszeit und K_t der Kapitaleinsatz der Firma t. Der Vektor der unbekannten Parameter ist $\boldsymbol{\beta}^T = (\gamma,\ \lambda,\ \delta,\ \rho)$. Die Substitutionselastizität ist gegeben als

$$\sigma := \frac{d \log(K/L)}{d \log(MP_L/MP_K)} = \frac{1}{1+\rho} \geq 0,$$

wobei MP_L bzw. MP_K das Grenzprodukt der Arbeit bzw. des Kapitals bezeichnen. Der Parameter λ ist der Grad der Homogenität, i.e. es liegen fallende/konstante/steigende Skalenerträge vor, falls λ kleiner/gleich/größer 1 ist.

(a) (2 Punkte) Laden Sie den Datensatz `prod_data.csv` in R. Inspizieren Sie ihn graphisch.

(b) (2 Punkte) Man kann zeigen, dass sich für $\rho = 0$ die Cobb-Douglas-Produktionsfunktion ergibt. Geben Sie die zugehörige log-lineare Regressionsgleichung an. Schätzen Sie dann die unbekannten Parameter, wobei Sie keine konstanten Skalenerträge unterstellen.

(c) (2 Punkte) Führen Sie einen RESET-Spezifikationstest der geschätzten linearen Gleichung durch. Welchen Schluss ziehen Sie daraus?

(d) (3 Punkte) Führen Sie die lineare KQ-Schätzung aus b) mit der `nls()` Funktion durch. Was beobachten Sie bezüglich der Anzahl der Iterationen? Warum?

(e) (3 Punkte) Schätzen Sie nun die nichtlineare CES-Spezifikation (9). Verwenden Sie angesichts der obigen Schätzung plausible Startwerte.

(f) (2 Punkte) Testen Sie die Cobb-Douglas Spezifikation gegen den allgemeineren CES-Fall.

(g) (3 Punkte) Als weitere Spezialfälle der CES-Funktion ergeben sich für $\sigma = 0$ die Leontief-Produktionsfunktion und für $\sigma = \infty$ der Fall perfekter Substitution. Finden Sie Evidenz für bzw. gegen diese Fälle?

11. Aufgabe (20 Punkte) NLS: (**Nichtlineare Prognose von Aktienrenditen**)

Sie sollen überprüfen, ob das Divendenden-Preis-Verhältnis Prognosekraft für zukünftige Aktienrenditen hat. Etwa McMillan & Wohar (2009) betrachten ein nichtlineares Smooth-Transition Prognosemodell der Form

$$r_t = \alpha + \beta dp_{t-1}\left[1 - \mathrm{e}^{-\gamma(dp_{t-1}-c)^2}\right] + u_t, \qquad \mathrm{E}[(]u_t|\Omega_t) = 0. \tag{10}$$

Quartalsdaten zum S&P 500 Aktienindex sind im Datensatz `pred_data.csv` vorhanden, wobei `Return` die log-Rendite, `dp` den logarithmierte, trendbereinigte Dividenden-Kursrelation und `*.l1`, `*.l2` usw. die Lags der jeweiligen Variable bezeichnen.

(a) (2 Punkte) Laden Sie den Datensatz in R, entfernen Sie Beobachtungen mit fehlenden Werten und plotten Sie die Variablen als Zeitreihen untereinander.

(b) (2 Punkte) Schätzen Sie ein lineares Prognosemodell, indem Sie `Return` auf eigene Lags sowie verzögerte Werte von `dp` regressieren. Finden Sie Prognostizierbarkeit?

(c) (2 Punkte) Nehmen Sie im Modell (10) zunächst $\gamma = 3$ und $c = 0$ als gegeben an. Schätzen Sie die übrigen Parameter mit OLS mit der `lm()`-Funktion. Achten Sie darauf, den "zusammengesetzten" Regressor mit `I()` als solchen zu kennzeichnen.

(d) (2 Punkte) Variieren Sie für gegebenes $c = 0$ den Wert für γ. Versuchen Sie so, vernünftige Startwerte für die nichtlineare KQ-Schätzung zu finden.

(e) (3 Punkte) Führen Sie die nichtlineare KQ-Schätzung mit der `nls()`-Funktion durch. Interpretieren Sie das Ergebnis.

(f) (2 Punkte) Prognostizieren Sie die Rendite für das aktuelle Quartal mit `predict`.

(g) (5 Punkte) Führen Sie eine "Pseudo Out-Of-Sample" Prognoseevaluation durch. Dies bedeutet, dass Sie für $t = 130, 131, ..., n$ **jeweils** das Modell mit Daten bis zum Zeitpunkt t

Schätzen, und damit für $t+1$ Prognosen erstellen. Verwenden Sie das lineare Prognosemodell, das STR-Modell sowie als Vergleichsmaßstab eine naive Prognose, die die mittlere Rendite bis zum Zeitpunkt t als Prognose verwendet.

(h) (1 Punkt) Vergleichen Sie die Zeitreihen der prognostizierten Renditen mit den tatsächlichen Renditen, indem Sie alle in einem Diagramm plotten.

(i) (1 Punkt) Berechnen Sie die mittlere quadratische Abweichung der Prognosen vom wahren Wert (MSE). Welche Prognose ist diesbezüglich die Beste?

12. Aufgabe (24 Punkte) NLS: (**Eine mikroökonomische Kostenfunktion für den Energiesektor**)
Betrachtet wird der Datensatz `cost_data.csv`, der auf Nerlove (1963) zurückgeht. Zum Zeitpunkt der Datenerhebung befand sich die Energieversorgung in einer Phase starker staatlicher Regulierung, mit folgenden Konsequenzen für die Eigenschaften dieser Branche: (i) Regionale Anbietermonopole in Privatbesitz (die auf Nachfrage Energie liefern), (ii) Regional (unterschiedlich) durch Kommissionen regulierte Energiepreise, und (iii) Faktorpreise (z.B. Löhne) sind für die Unternehmen entweder durch vollkommenen Wettbewerb auf dem Markt für Inputfaktoren oder durch langfristige Kontrakte mit Gewerkschaften gegeben.

Es wird nun eine Cobb-Douglas Produktionsfunktion $Q_T = A_t L_T^a K_t^b F_t^c$ angenommen, wobei Q_t der Output eines Unternehmens t ist, L_t der Arbeitsinput, K_t der Kapitalinput und F_t der Treibstoff. Über die Produktivität A_t wird Heterogenität zwischen den Unternehmen modelliert. Als $d := a + b + c$ wird der Grad der Skalenerträge bezeichnet, im Fall $d = 1$ liegen konstante Skalenerträge vor. Durch Kostenminimierung der Unternehmen ist die CD-Produktionsfunktion auch mit einer CD-Kostenfunktion verbunden, die durch den loglinearen Regressionszusammenhang

$$\log(TC_t) = \gamma + \frac{1}{d}\log(Q_t) + \frac{a}{d}\log(PL_t) + \frac{b}{d}\log(PK_t) + \frac{c}{d}\log(PF_t) + u_t \tag{11}$$

gegeben ist, wobei TC_t die Gesamtkosten des Unternehmens t und PX_t die Kosten des Produktionsfaktors X für das Unternehmen t bezeichnet.

(a) (2 Punkte) Diskutieren Sie Annahme $\mathrm{E}[(]u_t|\boldsymbol{X}) = 0$ für den vorliegenden Regressionsansatz (11). Berücksichtigen Sie dabei insbesondere die o.a. Eigenschaften der Branche bzgl. der Energie- bzw. Faktorpreise. (2 Punkte)

(b) (1 Punkt) Geben Sie auch kurze Einschätzungen zu den Annahmen der Unkorreliertheit und der Homoskedastie der Störterme im vorliegenden Fall ab.

(c) (2 Punkte) Laden Sie den Datensatz `cost_data.csv` in R. Untersuchen Sie die Daten eingehend mit aussagekräftigen deskriptiven Statistiken und erzeugen Sie die logarithmisierten Variablen `lTC`, `lQ`, `lPL`, `lPF` und `lPK`.

(d) (2 Punkte) Führen Sie eine OLS-Schätzung von Ansatz (11) in der Form

$$\log(TC_t) = \gamma + \beta_1\log(Q_t) + \beta_2\log(PL_t) + \beta_3\log(PK_t) + \beta_4\log(PF_t) + u_t \tag{12}$$

durch. Welcher Schätzwert ergibt sich für d?

(e) (3 Punkte) Aus der mikroökonomischen Theorie folgt $d = a+b+c$, i.e. Linearhomogenität der Kostenfunktion. Führen Sie eine lineare KQ-Schätzung von Ansatz (12) unter dieser Restriktion durch.

(f) (3 Punkte) Führen Sie den Test der dieser Restriktion anhand der geschätzten Modelle mit allen Details durch.

(g) (2 Punkte) Ein Kollege, der wenig über eine mikroökonomische Fundierung des Schätzansatzes nachdenkt, schlägt folgenden Ansatz vor:

$$\log(TC_t/PF_t) = \gamma+\beta_1 \ln(Q_t)+\beta_2 \log(PL_t/PF_t)+\beta_3 \log(PK_t/PF_t)+\beta_4[\log(Q_t)]^2+u_t. \quad (13)$$

Wie bewerten Sie Ansatz (13) im Vergleich zu (12) inhaltlich? Schätzen Sie (13). Welche Mittel stehen Ihnen zur Verfügung, um beide Ansätze zu vergleichen und um sich für einen zu entscheiden? Setzen Sie diese Mittel ein.

(h) (3 Punkte) Führen Sie die Schätzung von (11) nun mit dem `nls()`-Befehl und $d = a+b+c$ durch, um auch Standardfehler für die Modellparameter a, b und c zu erhalten.

(i) (2 Punkte) Testen Sie die Annahme konstanter Skalenerträge auf Basis der nichtlinearen KQ-Schätzung.

Sie versuchen nun eine nichtlineare Smooth-Transition-Spezifikation (vgl. Hansen 2012, Ex. 8.4)

$$\log(TC_t) = \gamma + \frac{1}{d}\log(Q_t) + \frac{a}{d}\log(PL_t) + \frac{b}{d}\log(PK_t) + \frac{c}{d}\log(PF_t) + \beta\frac{\log(Q_t)}{1+e^{-(\log(Q_t)-\delta)}} + u_t \quad (14)$$

mit zusätzlichen Parametern β und δ.

(j) (1 Punkt) Um den Parameter δ identifieren zu können sollte für einige t gelten, dass $\log(Q_t) < \delta$ und für einige t, dass $\log(Q_t) > \delta$. Betrachten Sie die Daten, um einen sinnvollen Bereich für δ auszuwählen.

(k) (3 Punkte) Schätzen Sie das Modell (14) mit der nichtlinearen KQ-Methode unter der Restriktion $d = a+b+c$. Wählen Sie ihre Startwerte sorgfältig. Interpretieren Sie das Ergebnis.

13. Aufgabe (24 Punkte) NLS: (**Gesundheitsausgaben: Datenbeschaffung und Smooth Transition**) Angelehnt an Chakroun (2009) und FOE Skript Seite 21. Beschaffen Sie folgende Daten für OECD-Länder seit 1970 bis 2013: [3]

- Gesundheitsausgaben als Anteil am BIP,
- reales BIP pro Kopf (in Kaufkraftparitäten und konstanten Preisen),
- den Anteil der öffentlichen an den gesamten Gesundheitsausgaben und
- die Lebenserwartung in Jahren (der gesamten Bevölkerung von Geburt an)

(a) (5 Punkte) Importieren Sie die Daten in `R` und verarbeiten Sie diese zu einem Datensatz (`data.frame`) mit folgenden Abkürzungen:

[3] http://data.oecd.org

- log reale Gesundheitsausgaben pro Kopf (`lhe`),
- log reales Bruttoinlandsprodukt pro Kopf (`lgdp`),
- Lebenserwartung in Jahren(der gesamten Bevölkerung von Geburt an) (`lie`)
- Anteil der öffentlichen an den gesamten Gesundheitsausgaben (`phe_she`)
- Länder- und Jahreskennzeichnungen

Erstellen Sie dann Länderdummies, die den Wert 1 annehmen, wenn die Beobachtung dem jeweiligen Land entstammt, und 0 sonst.[4]

Eine Ausgabenfunktion für Gesundheitsleistungen auf Länderebene setzt diese zu Einkommen, demographischen Gegebenheiten sowie weiteren Einflussfaktoren in Beziehung

$$healthcareexpenditure = f(income, demography, institutions, technology, ...)$$

.

Zur Charakterisierung einer guten Gesundheit betrachtet man hier etwa die Einkommenselastizität ϵ mit

$$\epsilon = \frac{\partial f(.)}{\partial income}.$$

$\epsilon > 1$ bezeichnet Luxusgüter und $\epsilon < 1$ bezeichnet Bedarfsgüter. Interessant ist auch die Frage, ob stärker staatlich organisierte Gesundheitssystem c.p. mehr oder weniger Gesundheitsausgaben verursachen. Arbeiten Sie nun mit dem soeben erstellen Datensatz weiter.

(b) (5 Punkte) Untersuchen Sie nun den Datensatz anhand deskriptiver Methoden (Grafiken). Handelt es sich um einen balancierten Paneldatensatz? Schätzen Sie dann das Modell

$$lhe_{it} = \beta_0 + \beta_1 lgdp_{it} + \beta_2 phe\_sh_{it} + u_{it}.$$

Nehmen Sie, wenn nötig, auch Länder- und Jahresdummies (fixe Effekte) in das Modell auf. Interpretieren Sie das Ergebnis.

(c) (5 Punkte) In der Literatur Chakroun (2009) wurde untersucht, ob es sogenannte Schwelleneffekte gibt. In den Ländern mit hochproduktivem Gesundheitssektor könnte die Einkommenselastizität anders sein als in niedriger entwickelten Ländern. Die Produktivität im Gesundheitssektor soll nun mit der Lebenserwartung (`lie`) approximiert und der Zusammenhang durch eine logistische 2-Regime STR Modell abgebildet werden

$$lhe_{it} = \beta_1 + lgdp_{it} + \beta_3 lgdp_{it} G(lie_{it}, c, \nu) + \beta_4 phe\_sh_{it} + u_{it}$$

$$G(s_{it}, c, \nu) = \frac{1}{1 + exp(-\nu(s_{it} - c))}, \nu > 0$$

Erläutern Sie die Eigenschaften der Transistionsfunktion $G(.)$. Ist die asymptotische Parameteridentifikation in jedem Fall gewährleistet? Berechnen Sie auch die Einkommenselastizität ϵ in Abhängigkeit der erklärenden Variablen.

[4] Hinweis: Nutzen Sie die Befehle: `read.table, read.csv, merge, subset`.

(d) (5 Punkte) Testen Sie, ob die Interaktion $lgdp_{it} * lie_{it}$ im linearen Ansatz einen signifikanten Einfluss hat. Schätzen Sie dann das STR-Model mit dem der nichtlinearen KQ-Methode. Ein Beispiel:

```
n <- 1000
x <- rnorm(n) # Regressor
z <- 2*rnorm(n) # Transition Variable
u <- rnorm (n) # Error
y <- 5-x+2*2/(1+exp(-5*(z-0.5))) +u #Regressand
coplot(y~x|z) # Scatter y ~ x fir different z intervals
str.est <- nls(y~b1*x+(b2*x)/(1+exp(nu*(z-c))),
               start=c(b1=-1, b2=2, nu=-5, c=0),
               control=nls.control(maxiter=500))
summary(str.est)
```

Als Startwert können Sie $\beta_1 = -3,6, \beta_2 = 0,4, \beta_3 = 0,3, \nu = 1, c = 67, \beta_4 = 0$ verwenden. Fügen Sie auch fixe Ländereffekte (Länderdummies) in die Spezifikation ein, wobei die Parameterstartwerte hier jeweils 0 sein können. Interpretieren und veranschaulichen Sie das Ergebnis. Plotten Sie die Einkommenselastizitäten von verschiedenen Ländern über die Zeit.

(e) (4 Punkte) Halten Sie das geschätzte Modell für geeignet? Gehen Sie insbesondere auf Exogenität der Regressoren, korrekte funktionale Spezifikation und weggelassene Regressoren ein.

14. Aufgabe (5 Punkte) NLS: (**Mittelwertsatz**)

Der Mittelwertsatz spielt in der Theorie für nichtlineare ökonometrische Methoden eine wichtige Rolle.

Mittelwertsatz: *Für eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, die auf einem geschlossenen Intervall $[a,]$ definiert, stetig und differenzierbar auf $(a; b)$ ist, existiert ein $x_0 \in [a; b]$, so dass*

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

(a) (5 Punkte) Veranschaulichen Sie dieses Ergebnis graphisch. Skizzieren Sie einen Beweis. Für welche Werte von λ gilt

$$f(b) = f(a) + (b - a)f'(a + \lambda(b - a))$$

15. Aufgabe (14 Punkte) GLS: (**Verallgemeinerte Kleinst-Quadrate als Momentenschätzer**)
Betrachten Sie das Modell

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u}, \quad \mathrm{E}(\mathbf{u}\mathbf{u}^T|\mathbf{X}) = \boldsymbol{\Omega} \neq \sigma^2\mathbf{I}.$$

Der allgemeine Momentenschätzer für die Matrix $\mathbf{W}$ mit $\mathrm{E}(\mathbf{u}\mathbf{u}^T|\mathbf{X},\mathbf{W}) = \boldsymbol{\Omega}$ und $\mathrm{E}(\mathbf{u}|\mathbf{X},\mathbf{W}) = \mathbf{0}$ wird bestimmt aus

$$\mathbf{W}^T(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) \stackrel{!}{=} \mathbf{0}. \tag{15}$$

(a) (2 Punkte) Geben Sie modellhaft einen Fall an, in dem $\mathrm{E}(\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T|\boldsymbol{X},\boldsymbol{W}) = \mathrm{E}(\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T)$ gilt und einen, wo diese Gleichung verletzt ist.

(b) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass sich der Momentenschätzer $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{MM} = (\mathbf{W}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{W}^T\mathbf{y}$ aus der Bedingung (15) ergibt.

(c) (3 Punkte) Leiten Sie die bedingte Varianz-Kovarianzmatrix $\mathrm{Var}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{MM}|\boldsymbol{X},\boldsymbol{W})$ her.

(d) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass der GLS-Schätzer, der sich für $\mathbf{W} = \boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{X}$ ergibt, unter den allgemeinen unverzerrten Momentenschätzern effizient in endlichen Stichproben ist.

Gehen Sie von Zeitreihenbeobachtungen $\{y_t, \boldsymbol{X}_t\}$ aus. Die strenge Exogenität von $\boldsymbol{X}$ wird nun aufgegeben zugunsten $\mathrm{E}(u_t|\boldsymbol{X}_t) = 0$.

(e) (2 Punkte) Welche Momentenbedingung muss ein valides "Instrument" $\boldsymbol{W}$ erfüllen? In welchem Fall kann dies für die Wahl $\mathbf{W} = \boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{X}$ problematisch sein?

(f) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass die Wahl $\mathbf{W} = \boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{X}$, falls zulässig, einen asymptotisch effizienten Schätzer erzeugt.

16. Aufgabe (12 Punkte) GLS: (**Lohn-Phillipskurve und Autokorrelation in den Fehlern**)
Ein makroökonomisches Modell der Lohnsetzung lässt sich darstellen als

$$\Delta w_t = \beta_{w0} + \beta_{w1}u_t + \beta_{w2}\Delta a_t + \beta_{w3}\Delta q_t + \beta_{w4}\Delta p_t + \varepsilon_{w,t} \tag{16}$$

wobei (in natürlichen Logarithmen) w_t den Nominallohn, u_t die Arbeitslosenquote, a_t Arbeitsproduktivität, q_t Produzentenpreise und p_t den Konsumentenpreisindex bezeichnen. Es wird angenommen, dass $\mathrm{E}(\varepsilon_{w,t}|\boldsymbol{X}) = 0$.

(a) (1 Punkt) Erläutern Sie die ökonomische Intuition hinter der Gleichung. Gehen Sie dabei auf die Plausibilität der Annahme $\mathrm{E}(\varepsilon_{w,t}|\boldsymbol{X}) = 0$ ein.

(b) (1 Punkt) In den jährlichen Daten für Norwegen `norge_data.csv` sind neben den oben genannten (`d.*` bezeichnet Log-Differenz, `*.l1` meint erstes Lag der jeweiligen Variablen) noch weitere potenzielle Determinanten der Lohnsetzung enthalten, etwa die Log-Lohnersatzrate rpr_t sowie die Lohnsteuer im Industriesektor in Levels, $t1_t$, und die Veränderungen der täglichen Arbeitsstunden Δh_t. Lesen Sie die Daten in `R` ein. Stellen Sie sie dann graphisch dar.

(c) (2 Punkte) Schätzen Sie nun die Parameter der Phillipskurve (16). Plotten Sie die Residuen als Zeitreihe. Untersuchen Sie die Residuen graphisch auf Autokorrelation (`acf`) und Heteroskedastie.

(d) (3 Punkte) Berechnen Sie Standardfehler des Modells, die auch bei Vorliegen von Heteroskedastie und Autokorrelation konsistent sind. Benutzen Sie hierfür das `sandwich`-Paket und hierin die Funktionen `vcovHC` und `vcovHAC`. Berechnen Sie für letztere zunächst mit `weightsAndrews` die Gewichte

(i) des Hansen-White Schätzers mit $p = 3$ (`kernel="Truncated"`, `bw=3`, `prewhite=0`),

(ii) des Newey-West-Schätzers mit $p = 3$ (`kernel="Bartlett"`, `bw=3`, `prewhite=0`) und

(iii) des Newey-West-Schätzers mit automatisch berechneter Bandweite (kein `bw`).

(e) (2 Punkte) Betrachten Sie nun als mögliches Modell

$$\Delta w_t - \Delta p_{t-1} = \beta_0 + \beta_1 \Delta p_{t-1} + \beta_2 \Delta q_t + \beta_3 \Delta q_{t-1} + \beta_4 u_t + \beta_5 IP_t + \varepsilon_t, \mathrm{E}(\varepsilon_t|\Omega_t) = 0$$

Ω_t bezeichne die Informationsmenge zum Zeitpunkt t (mögliche erklärende Variablen bis einschließlich Zeitpunkt t, abhängige Variable bis $t-1$). Interpretieren Sie die geschätzten Koeffizienten. Prüfen Sie, ob hier eine Fehlspezifikation vorliegen könnte.

(f) (3 Punkte) Plotten Sie die rekursiven Schätzer: Schätzen Sie das Modell mit den Daten bis zum Zeitpunkt $t_0 = 1976$. Wiederholen Sie die Schätzung mit je einer weiteren Beobachtung und stellen Sie die Koeffizientenschätzer sowie Konfidenzintervalle in Abhängigkeit des Endzeitpunkts dar. Gibt es Hinweise auf Parameterinstabilität?

17. Aufgabe (4 Punkte) GLS: (**Fixed Effects Schätzung**)

In einem Panel mit m Querschnitts- und T Längsschnittbeobachtungen enthalte der Fehler u_{it} für Individuum $i = 1, \ldots, m$, und Zeitpunkt $t = 1, \ldots, T$, einen individuenspezifischen Teil v_i und eine Restkomponente ε_{it}. Dabei sei v_i stochastisch unabhängig von allen ε_{jt}, $j = 1, \ldots, m$, aber möglicherweise mit den erklärenden Variablen $\mathbf{X}$ korreliert. Zeigen Sie, dass KQ-Schätzung von

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{D}\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

und das Modell

$$y_{it} - \bar{y}_{i\cdot} = \beta_1(x_{it,1} - \bar{x}_{i\cdot,1}) + \cdots + \beta_k(x_{it,k} - \bar{x}_{i\cdot,k}) + \varepsilon_{it} - \varepsilon_{i\cdot}$$

zu gleichen Schätzergebnissen für $\boldsymbol{\beta}$ führen.

18. Aufgabe (0 Punkte) GLS: (**Panel II**)

Zeigen Sie, dass für den Schätzer für $\boldsymbol{\beta}$ im Fixed Effects Modell

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{FE}|\mathbf{X} \sim N(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2(\mathbf{X}^T\mathbf{M_D}\mathbf{X})^{-1})$$

gilt, wenn $\boldsymbol{\varepsilon}|\mathbf{X} \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2\mathbf{I})$ und die sonstigen üblichen Annahmen gelten.
Warum wird σ^2 mit $m(T-1) - k$ statt $mT - k$ Freiheitsgraden geschätzt?

19. Aufgabe (5 Punkte) GLS: (**Das Random Effects Modell**)

Für die Fehler des Modells $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{u}$ mit $\mathrm{E}[(]\boldsymbol{u}|\boldsymbol{X}) = \mathbf{0}$ gelte

$$u_{it} = v_i + \varepsilon_{it}, \quad i = 1, \ldots, m,\ t = 1, \ldots, T.$$

Dabei seien die v_i und die ε_{jt} für alle i, j, t unabhängig und $v_i|\boldsymbol{X} \sim IID(0, \sigma_v^2)$, $\varepsilon_{it}|\boldsymbol{X} \sim IID(0, \sigma_\varepsilon^2)$. Bestimmen Sie

(a) (1 Punkt) $\mathrm{Var}(u_{it}|\mathbf{X})$,

(b) (1 Punkt) $\mathrm{Cov}(u_{it}, u_{is}|\mathbf{X})$ für $s \neq t$,

(c) (1 Punkt) $\mathrm{Cov}(u_{it}, u_{js}|\mathbf{X})$ für $i \neq j$,

(d) (2 Punkte) $\mathrm{Var}(\mathbf{u}|\mathbf{X})$, wobei $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1T} & u_{21} & \cdots & u_{mT} \end{pmatrix}^T$.

20. Aufgabe (15 Punkte) GLS: (**Schätzung einer Zigarettennachfragefunktion**)

Für diese Aufgabe soll der Panel-Datensatz `Cigarette` aus dem R-Zusatzpaket `Ecdat` verwendet werden. Diesen können Sie sich mit `data(''Cigarette'', package=''Ecdat'')` in Ihren Workspace laden. Im Paket `plm` werden verschiedene Panel-Methoden zur Verfügung gestellt.

(a) (1 Punkt) Laden Sie das Paket `Ecdat` und informieren Sie sich in der Beschreibung über die Variablen im Datensatz `Cigarette` (z.B. mit `?Cigarette`).

Betrachten Sie das Panel-Modell

$$packpc_{it} = \alpha + \beta_1 avgprs_{it} + \beta_2 \left(\frac{income}{pop}\right)_{it} + u_{it}, \quad i = 1, \ldots, 48, \ t = 1, \ldots, 11.$$

Beachten Sie, dass hier i und t anders als im Datensatz gezählt werden. Im Datensatz sind für die Jahre 1985 bis 1995 und 48 der bis 51 durchnummerierten Staaten der USA Beobachtungen enthalten. Die Fehler u_{it} lassen sich in

$$u_{it} = v_i + \varepsilon_{it}$$

aufspalten. Nehmen Sie zunächst an, dass die unbeobachtbaren individuenspezifischen Effekte v_i zufällig und unabhängig von $avgprs_{it}$ und $income_{it}$ sind.

(b) (2 Punkte) Schätzen Sie das Modell mit der Random-Effects-Methode. Verweden Sie dazu die Funktion `plm` des gleichnamigen Pakets.

(c) (3 Punkte) Interpretieren Sie die Parameterschätzer und `theta` im Output. Beachten Sie, dass das `theta` dem λ aus der Vorlesung entspricht. Wie könnten Sie dieses aus den sonstigen Angaben des Outputs selbst berechnen?

(d) (2 Punkte) Nehmen Sie nun an, dass die unbeobachtbaren individuenspezifischen Effekte v_i fest sind und schätzen Sie das Modell mit der Fixed-Effects-Methode.

(e) (2 Punkte) Interpretieren Sie wieder die Parameterschätzer und vergleichen Sie diese mit denen der Random-Effects-Schätzung. War dieses Ergebnis schon aus dieser Schätzung zu erwarten?

(f) (2 Punkte) Führen Sie mit dem Befehl `phtest` den Hausman-Test auf die Unkorreliertheit der individuenspezifischen Effekte mit den übrigen Regressoren durch und interpretieren Sie das Ergebnis.

(g) (2 Punkte) Sehen Sie im vorliegenden Beispiel einen Grund, sich zwischen den beiden Schätzungen zu entscheiden?

(h) (1 Punkt) Sehen Sie inhaltlich/ökonomisch einen Grund, an der Exogenität der Preise $E(u_{it}|avgprs_{it}) = 0$ zu zweifeln? Sehen Sie einen Ausweg?

21. Aufgabe (7 Punkte) GLS: (**Multivariate Regression mit OLS**)

(a) (1 Punkt) Geben Sie ein multivariates Regressionsmodell mit zeitgleich korrelierten Fehlertermen (SUR-System) an.

(b) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass die gewöhnliche Kleinst-Quadrate-Methode dem anwendbaren GLS-Schätzer entspricht, wenn die Regressoren in jeder Gleichung identisch sind.

(c) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass die gewöhnliche Kleinst-Quadrate-Methode dem anwendbaren GLS-Schätzer entspricht, wenn angenommen wird, dass die Fehlerterme unbedingt heteroskedastisch sind (unterschiedliche unbedingte Varianzen je Gleichung haben), aber nicht kontemporär korreliert sind.

22. Aufgabe (18 Punkte) GLS: (**Ein Prognosesystem für den Aktienmarkt**)

Betrachten Sie das bivariate Regressionsmodell

$$r_t = \alpha_1 + \alpha_2 r_{t-1} + \alpha_3 dp_{t-1} + \varepsilon_{r,t} \tag{17}$$

$$dp_t = \gamma_1 + \gamma_2 dp_{t-1} + \varepsilon_{dp,t}, \qquad \mathrm{E}[(]\varepsilon_{r,t}|\Omega_t) = \mathrm{E}[(]\varepsilon_{dp,t}|\Omega_t) = 0. \tag{18}$$

Quartalsdaten zum S&P 500 Aktienindex sind im Datensatz `pred_data.csv` vorhanden, wobei `Return` die log-Rendite, `dp` den logarithmierte, trendbereinigte Dividenden-Kursrelation und `*.l1`, `*.l2` usw. die Lags der jeweiligen Variable bezeichnen.

(a) (2 Punkte) Geben Sie das Modell in Matrixschreibweise an.

(b) (1 Punkt) Laden Sie den Datensatz `pred_data.csv` in R und untersuchen Sie die Variablen graphisch.

(c) (1 Punkt) Sie nehmen an, die Variable `dp` sei eine stationäre Zeitreihe. Können Sie diese Aussage prüfen? (Nicht im Kurs behandelt)

(d) (3 Punkte) Verwenden Sie die Funktion `systemfit()` des gleichnamigen Pakets, um eine OLS-Schätzung beider Gleichungen gleichzeitig durchzuführen. Schauen Sie sich zunächst mit `?systemfit` die Hilfe an. Vergleichen Sie das Ergebnis mit der `lm()`-Funktion.

(e) (1 Punkt) Geben Sie die Matrix der kontemporären Residuenkorrelationen aus. Kommentieren Sie das Ergebnis.

(f) (2 Punkte) Sie nehmen an, dass $\mathrm{E}[(]\varepsilon_{r,t}\varepsilon_{dp,t}) = \sigma_{12} \neq 0$, also dass $\boldsymbol{\omega}$ nicht diagonal ist. Können Sie hier den Einsatz von OLS und feasible GLS trotz verzögerter endogener Variablen rechtfertigen?

(g) (2 Punkte) Berechnen Sie den anwendbaren GLS-Schätzer (SUR-Schätzer). Was ändert sich?

(h) (2 Punkte) Ein Kollege sieht Ihre Schätzungen und meint anerkennend: “Es ist eine gute Idee, den GLS-Schätzer zu verwenden. Nun muss man sich auch über Autokorrelation in den Fehlern keinen Kopf mehr machen, da diese von der Schätzung schon berücksichtigt ist." Was entgegnen Sie? Gehen Sie dabei auf die Bedeutung des Begriffs "Autokorrelation" ein.

(i) (2 Punkte) Überprüfen Sie graphisch, ob Autokorrelation in den Fehlern vorhanden ist. Falls ja, handeln Sie entsprechend.

(j) (2 Punkte) Erzeugen Sie eine Out-Of-Sample Prognose der Renditen für das nachfolgende Quartal.

23. Aufgabe (13 Punkte) IV: (**Einfache Instrumentvariablenschätzung**)

Es sei ein lineares Modell mit k erklärenden Variablen $\boldsymbol{X}_t$ gegeben, die aber **nicht** vorherbestimmt sein müssen:

$$y_t = \mathbf{X}_t\boldsymbol{\beta} + u_t, \quad u_t|\Omega_t \sim IID(0, \sigma^2).$$

Ihnen steht eine $n \times k$ Instrumentenmatrix $\boldsymbol{W}$ mit $\boldsymbol{W}_t \in \boldsymbol{\Omega}_t$ zur Verfügung.

(a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass gilt $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{IV} := (\boldsymbol{W}^T\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{W}^T\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{P_W}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{P_W}\boldsymbol{y}$. Hinweis: $(\boldsymbol{AB})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$, falls die Inversen existieren.

(b) (3 Punkte) Der 2SLS-Schätzer $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{2sls}$ entspricht dem OLS-Schätzer für $\boldsymbol{\beta}$ in $\boldsymbol{y} = \widehat{\hat{\boldsymbol{X}}}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{u}$. Dabei sind $\widehat{\hat{\boldsymbol{X}}} = (\hat{\hat{\boldsymbol{x}}}_1 \dots \hat{\hat{\boldsymbol{x}}}_k)$ die gefitteten Werte aus den Hilfsregressionen $\boldsymbol{x}_j = \boldsymbol{W}\boldsymbol{\gamma}_j + \boldsymbol{v}_j$, $j = 1, \dots, k$. Zeigen Sie, dass $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{IV} = \hat{\boldsymbol{\beta}}_{2sls}$ gilt.

(c) (3 Punkte) Es sei nun $\hat{\boldsymbol{\delta}}$ der OLS-Schätzer aus $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{W}\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\eta}$. Die $(k \times k)$-Matrix $\widehat{\boldsymbol{\Gamma}} = (\hat{\gamma}_1, \dots, \hat{\gamma}_k)$ enthält die OLS-Koeffizientenschätzer für alle k Regressionen $\boldsymbol{x}_j = \boldsymbol{W}\boldsymbol{\gamma}_j + \boldsymbol{v}_j$, $j = 1, \dots, k$. Zeigen Sie, dass $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{IV} = \widehat{\boldsymbol{\Gamma}}^{-1}\hat{\boldsymbol{\delta}}$.

(d) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass $Q(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{IV}) = (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{IV})^T\boldsymbol{P_W}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{IV}) = 0$.

(e) (3 Punkte) Es gelte nun $E[u_t|\mathbf{X}_t] = 0$. Geben Sie die asymptotische Kovarianzmatrix des OLS-Schätzers $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{OLS}$ und des IV-Schätzers $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{IV}$ unter geeigneten Annahmen an. Verwenden Sie die Differenz der asymptotischen Präzisionsmatrizen, um zu zeigen, dass $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{OLS}$ mindestens so effizient ist wie $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{IV}$.

24. Aufgabe (10 Punkte) IV: (**Verallgemeinerte IV-Schätzung**)

Sie verfügen über eine $n \times l$ Instrumentenmatrix $\boldsymbol{W} = (\boldsymbol{W}_1; \boldsymbol{W}_2)$, wobei $\boldsymbol{W}_1$ eine $n \times l_1$ und $\boldsymbol{W}_2$ eine $n \times l_2$ Matrix ist ($l = l_1 + l_2$, $l_1 \geq k$).

(a) (2 Punkte) Geben Sie die asymptotische Kovarianzmatrix des verallgemeinerten IV-Schätzers $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{GIV}$ unter Verwendung der gesamten Instrumentenmatrix $\boldsymbol{W}$ an. Welche Annahmen brauchen Sie dazu?

(b) (4 Punkte) Zeigen Sie, dass $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{GIV}$ asymptotisch mindestens so effizient ist wie der Schätzer $\tilde{\boldsymbol{\beta}}_{GIV}$, der nur die Instrumente $\boldsymbol{W}_1$ verwendet.

(c) (4 Punkte) Wie fällt der Effizienzvergleich aus, falls für $\boldsymbol{x}_j = \boldsymbol{W}_1\boldsymbol{\gamma}_{1j} + \boldsymbol{W}_2\boldsymbol{\gamma}_{2j} + \boldsymbol{v}_j$ gilt, dass $\boldsymbol{\gamma}_{2j} = \mathbf{0}$ für alle $j = 1, \dots, k$? Argumentieren Sie asymptotisch und in endlichen Stichproben.

25. Aufgabe (11 Punkte) IV: (**Milchnachfrage**)

Betrachten Sie ein lineares Modell der Milchnachfrage auf Länderebene

$$q_t = p_t\beta + u_t, \qquad \mathrm{E}(u_t|\Omega_t) = 0, \qquad \mathrm{Var}(u_t|\Omega_t) = \sigma^2, \qquad t = 1, 2, \dots, n, \tag{19}$$

wobei q_t den (logarithmierten) Milchkonsum pro Kopf, p_t den (logarithmierten) Endverbraucherpreis für Milch und β die Elastizität der Milchnachfrage bezeichnet. Es liege eine Zufallsstichprobe vor.

(a) (1 Punkt) Nennen Sie zwei Gründe, weshalb im vorliegenden ökonomischen Beispiel $\mathrm{E}(u_t|p_t) = 0$ verletzt sein könnte.

(b) (2 Punkte) Geben Sie ein mögliches Instrument an. Gehen Sie auf dessen Eignung ein.

Es stehe nun **eine** Instrumentvariable $z_t \in \Omega_t$ zur Verfügung. Es gilt

$$\begin{aligned} S_{pz} &:= \mathrm{E}(p_t z_t), \qquad 0 < |S_{pz}| < \infty, \\ S_{pp} &:= \mathrm{E}(p_t^2), \qquad 0 < S_{pp} < \infty, \\ S_{zz} &:= \mathrm{E}(z_t^2), \qquad 0 < S_{zz} < \infty. \end{aligned}$$

(c) (4 Punkte) Geben Sie unter Gültigkeit der Modellannahmen für $n \to \infty$ das asymptotische Verhalten (asymptotische Verteilung bzw. Wahrscheinlichkeitslimes, falls existent) der folgenden Terme an

(i) $\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} z_t u_t$, (ii) $\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} z_t p_t$, (iii) $\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{n} z_t u_t$, (iv) $\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{n} z_t p_t$

(d) (2 Punkte) Zeigen Sie (unter Gültigkeit der erforderlichen Annahmen) die Konsistenz des IV-Schätzers.

Sie haben nun $l > 1$ Instrumente $w_{tj} \in \Omega_t$, $j = 1, \ldots, l$ zur Verfügung. Das optimale Instrument sei unbekannt.

(e) (2 Punkte) In welchem Fall ist es asymptotisch **nicht** von Nachteil, nur ein einziges Instrument w_{ts}, $s \in \{1, 2, \ldots, l\}$ und den einfachen IV-Schätzer zu verwenden?

26. Aufgabe (9 Punkte) IV: (**Ein lineares System**)

Es ist ein lineares Modell für eine Zufallsstichprobe von Daten gegeben,

$$y_t = x_t\beta + u_t, \tag{20}$$

$$x_t = w_{1t}\gamma_1 + w_{2t}\gamma_2 + v_t, \tag{21}$$

mit folgenden Annahmen an die Fehlerterme:

$$\mathrm{E}[u_t|\boldsymbol{W}_t] = \mathrm{E}[v_t|\boldsymbol{W}_t] = 0$$
$$\mathrm{Var}[u_t|\boldsymbol{W}_t] = \sigma_u^2, \quad \mathrm{Var}[v_t|\boldsymbol{W}_t] = \sigma_v^2 \quad \text{und} \quad \mathrm{Cov}[u_t, v_t|\boldsymbol{W}_t] = \sigma_{uv}.$$

(a) (Punkte) Welche Restriktionen auf $\boldsymbol{\theta} := (\beta,\ \boldsymbol{\gamma}^T,\ \sigma_u,\ \sigma_v,\ \sigma_{uv})^T$ sind erforderlich, damit der OLS-Schätzer für β konsistent ist. (2 Punkte)

(b) (2 Punkte) Die Annahme für konsistente OLS-Schätzung sei verletzt. Welche Anforderungen muss $\boldsymbol{\theta}$ erfüllen, damit β mit der Instrumentvariablenmethode konsistent geschätzt werden kann?

(c) (2 Punkte) Wie würden Sie in der Praxis entscheiden, ob sie für die IV-Schätzung als Instrument w_{1t}, w_{2t} oder beide Instrumente verwenden?

(d) (3 Punkte) Was macht der folgende R-Code? Worauf kann das Ergebnis Aufschluss geben?

```
library(AER)
estiv <- ivreg(y~-1+x|w1)
uiv <- estiv$resid
plot(w1,uiv)
```

(e) (2 Punkte) Das obige Modell wird nun erweitert auf k Regressoren $\boldsymbol{X}_t$ und k Instrumente $\boldsymbol{W}_t \in \Omega_t$. Zeigen Sie, dass die Verwendung von $\boldsymbol{W}$ als Instrumentenmatrix zum gleichen Schätzer führt wie $\boldsymbol{WJ}$ für eine invertierbare $k \times k$ Matrix $\boldsymbol{J}$.

27. Aufgabe (9 Punkte) IV: (**Ausbildung und Stundenlöhne**)
Betrachten Sie zur Untersuchung des Stundenlohns von Frauen das Modell

$$log(hearnw)_t = \beta_1 + \beta_2 educw_t + \beta_3 experience_t + u_t, \quad t = 1, \ldots, 428.$$

Dabei bezeichne $hearnw_t$ den Stundenlohn (in 1975-US$), $educw_t$ die Ausbildungsdauer (in Jahren) und $experience_t$ die Berufserfahrung (in Jahren) von Frau t.

Verwenden Sie für diese Aufgabe den Datensatz `Mroz` aus dem Paket Ecdat. Schränken Sie die Schätzungen die Stichprobe auf die Frauen ein, die außer Haus arbeiten, also einen positiven Stundenlohn haben. Verwenden Sie dazu beispielsweise den Befehl `Mroz_pos <- subset(Mroz, hearnw>0)`.

(a) (2 Punkte) Warum könnte hier die Annahme der Exogenität von $educw_t$ verletzt sein?

(b) (1 Punkt) Welche Probeme ergeben sich daraus, wenn Sie obiges Modell dennoch mit OLS schätzen?

(c) (3 Punkte) Führen Sie eine IV-Schätzung durch, bei der $experience_t$ sein eigenes Instrument ist und $educwm_t$ und $educwf_t$ (Ausbildung der Eltern der Frau in Jahren) Instrumente für $educw_t$ sind. Verwenden Sie für die Schätzung einerseits den 2SLS-Schätzer und andererseits den einfachen IV-Schätzern. Vergleichen Sie die Ergebnisse. In R können Sie eine IV-Schätzung beispielsweise mit dem Befehl `ivreg` des Pakets AER durchführen.

(d) (2 Punkte) Welche Annahmen müssen $educwm_t$ und $educwf_t$ erfüllen, damit sie überhaupt gültige Instrumente für $educw_t$ sind? Halten Sie diese Annahmen hier für gerechtfertigt?

(e) (1 Punkt) Mit welchem Test könnten Sie überprüfen, ob beide Instrumente verwendet werden sollen?

28. Aufgabe (47 Punkte) IV: (**Kolonialisierung und Entwicklung**)

(a) (0 Punkte) Lesen Sie Acemoglu et al. (2001).

(b) (4 Punkte) Erläutern Sie kurz den Zusammenhang zwischen Siedlersterblichkeit und Besiedlungsdichte in der Kolonialzeit, institutioneller Ausgestaltung zur Kolonialzeit, derzeitigen Institutionen und aktuellem BIP pro Kopf. Geben Sie auch ein entsprechendes Gleichungssystem an.

(c) (3 Punkte) Wie wird die Güte der Institutionen gemessen? Wie wird die Wirkung auf das Einkommen ökonomisch begründet?

(d) (4 Punkte) In Tabelle 2 finden sich OLS-Ergebnisse einer Regression von BIP pro Kopf auf Institutionen und weitere Regressoren. Zeigen Sie anhand des in b) formulierten Gleichungssystems auf, woher Probleme für die OLS-Schätzung rühren könnten.

(e) (4 Punkte) Beschreiben Sie den empirischen Ansatz, der in Tabelle 4 verfolgt wird. Geben Sie für Tabelle 4, Ansatz (2) die Regressormatrix $\boldsymbol{X}$ sowie die Instrumentenmatrix $\boldsymbol{W}$ an. Wie lautet der Schätzer?

(f) (4 Punkte) Nennen Sie notwendige Annahmen für die Validität des Ansatzes und diskutieren Sie diese. Wie wird im Aufsatz versucht, diese zu untermauern?

(g) (3 Punkte) Wie erklären Sie die Unterschiede zwischen OLS- und IV-Schätzungen?

(h) (5 Punkte) Beschreiben Sie den Test der Überidentifikationsrestriktionen, der in Tabelle 8 durchgeführt wird. Nennen Sie Annahmen, Hypothesen, Teststatistik, asymptotische Verteilung.[5] Sehen Sie Probleme?

(i) (3 Punkte) An welchen Stellen lässt der Aufsatz Fragen offen?

Der Datensatz `ajr_data.csv` enthält Originaldaten zu Acemoglu et al. (2001), wovon einige hier aufgelistet sind:

lgdp95	Log Bruttoinlandsprodukt pro Kopf PPP 1995
institutions	Maß für Güte der Institutionen (siehe Aufsatz)
lsettlermortality	Log Siedlersterblichkeit zur Kolonialzeit
basesample	Stichprobe, die in Acemoglu et al. (2001) zur Schätzung verwendet wird
settlers1900	Europäische Siedler 1900
latitude	"Entfernung" vom Äquator (|Breitengrad der Hauptstadt|/90)
constrexecut1900	Beschränkung der Exekutive 1900
constrexec_indep	Beschränkung der Exekutive im ersten Jahr der Unabhängigkeit
democ1900	Demokratieindex 1900
democ_indep	Demokratieindex im ersten Jahr der Unabhängigkeit
cont_...	Kontinentdummies (Referenzkategorie: Amerika)

(j) (3 Punkte) Laden Sie die Daten `ajr_data.csv` in `R`. Untersuchen Sie ihn deskriptiv und graphisch. Erstellen Sie dann einen Datensatz, der nur die Basisstichprobe enthält.

(k) (3 Punkte) Führen Sie Regression (6) aus Tabelle 2 durch. Testen Sie, ob die Kontinentdummies gemeinsam einen signifikanten Effekt auf das Einkommen haben.

(l) (5 Punkte) Schätzen Sie nun die gleiche Spezifikation mit der IV-Methode, wobei Sie die Siedlersterblichkeit als Instrument für Institutionen verwenden. Sind nun die Kontinentdummies signifikant? Verwenden Sie die `ivreg()`-Funktion aus dem `AER` Paket.

(m) (4 Punkte) Testen Sie die Robustheit der Parameterschätzungen, indem Sie zusätzliche exogene Kontrollvariablen berücksichtigen, vgl. Tabellen 5-7.

(n) (2 Punkte) Verwenden Sie nun in weiteren Spezifikationen als weitere Instrumente die in Tabelle 8 vorgeschlagenen. Gibt es Hinweise darauf, dass eines der Instrumente invalide sein könnte? Testen Sie jeweils die Überidentifikationsrestriktionen. Beurteilen Sie das Vorgehen.

[5] Siehe Davidson & MacKinnon (2004, Abschnitt 8.6)

29. Aufgabe (22 Punkte) IV: (**Ein einfaches Beispiel**)

Sie möchten im Rahmen des ökonometrischen Modells

$$y_t = x_t\beta + u_t, \qquad u_t|\Omega_t \sim IID(0,\sigma^2), \qquad t = 1,\ldots,n,$$

den ceteris-paribus Effekt von Institutionen (x_t) auf das logarithmierte BIP (y_t) analysieren. Es liegt eine Zufallsstichprobe vor. Alle Variablen sind mittelwertbereinigt. Es gelte außerdem

$$\frac{1}{n}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x} \xrightarrow{p} S_{\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}}, \quad S_{\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}} \neq 0. \tag{22}$$

(a) (3 Punkte) Geben Sie drei Gründe an, warum in diesem Beispiel $\mathrm{E}(u_t|x_t) = 0$ verletzt sein könnte.

(b) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass, falls $\mathrm{E}(u_t|x_t) = a \neq 0$, der OLS-Schätzer $\hat{\beta}_{OLS} = (\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x})^{-1}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y}$ für β_0 inkonsistent ist.

Es wird im Folgenden angenommen, dass $w_{t1} \in \Omega_t$, wobei w_{t1} die logarithmierte Siedlersterblichkeit zur Kolonialzeit ist. Es bezeichne $\boldsymbol{w}_1 = (w_{11},\ldots,w_{n1})^T$.

(c) (1 Punkt) Geben Sie einen kritischen Einwand gegen die Annahme $w_{t1} \in \Omega_t$ für das vorliegende ökonomische Beispiel.

(d) (2 Punkte) Welche zusätzliche Voraussetzung muss das Instrument w_{t1} noch erfüllen, um eine konsistente Schätzung von β zu ermöglichen?

(e) (2 Punkte) Sie wollen den Instrumentvariablenschätzer $\hat{\beta}_{IV}$ in **R** mithilfe der `lm`-Funktion berechnen. Ergänzen Sie die fehlende Zeile im Programm.

```
y <- log_gdp - mean(log_gdp)
x <- institutions - mean(institutions)
w1 <- log_settler_mortality - mean(log_settler_mortality)
???
beta_iv <- lm( y ~ -1 + xhat )$coef
```

(f) (3 Punkte) Es gelte nun außerdem:

$$\frac{1}{n}\boldsymbol{w}_1^T\boldsymbol{x} \xrightarrow{p} \boldsymbol{S}_{\boldsymbol{w}_1^T\boldsymbol{x}}, \quad S_{\boldsymbol{w}_1^T\boldsymbol{x}} \neq 0, \tag{23}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\boldsymbol{w}_1^T\boldsymbol{u} \xrightarrow{d} v_\infty, \qquad v_\infty \sim N(0,\sigma^2 S_{\boldsymbol{w}_1^T\boldsymbol{w}_1}). \tag{24}$$

Leiten Sie skizzenhaft die asymptotische Verteilung von $\hat{\beta}_{IV}$ her.

(g) (2 Punkte) Wie können Sie $\mathrm{Var}(\hat{\beta}_{IV})$ schätzen?

Es gibt nun ein weiteres Instrument $w_{t2} \in \Omega_t$. Es sei $\boldsymbol{w}_2 = (w_{12},\ldots,w_{n2})^T$ sowie $\boldsymbol{W} = (\boldsymbol{w}_1 : \boldsymbol{w}_2)$.

(h) (2 Punkte) Sie wollen nur **ein** Instrument, also $\boldsymbol{w}_1$ **oder** $\boldsymbol{w}_2$ verwenden. Welches Kriterium ist für diese Entscheidung ausschlaggebend?

(i) (2 Punkte) Erläutern Sie, wie Sie auf Basis der Hilfsregressionen

$$x_t = w_{t1}\gamma + v_t, \tag{25}$$

$$x_t = w_{t2}\tilde{\gamma} + \tilde{v}_t \tag{26}$$

entscheiden können, welches Instrument sie wählen würden, wenn Sie **genau ein** Instrument wählen dürfen.

(j) (3 Punkte) Der verallgemeinerte IV-Schätzer $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{GIV}$ verwendet beide Instrumente, also $\boldsymbol{W}$. Der einfache IV-Schätzer $\hat{\beta}_{IV}$ verwendet nur $\boldsymbol{w}_1$. Zeigen Sie (formal oder verbal), dass

$$\lim_{n\to\infty} \text{Var}[\sqrt{n}(\hat{\beta}_{IV} - \boldsymbol{\beta}_0)] - \lim_{n\to\infty} \text{Var}[\sqrt{n}(\hat{\beta}_{GIV} - \boldsymbol{\beta}_0)] \geq 0.$$

Erläutern Sie die Aussagekraft dieses Ergebnisses für die empirische Arbeit.

30. Aufgabe (25 Punkte) GMM: (**Ein GMM-Rechenbeispiel**)

Gegeben ist ein lineares Modell

$$
\begin{aligned}
y_t &= x_t\beta + u_t, \qquad \mathrm{E}(u_t|z_t) = 0, \quad t = 1,\dots,n \\
\boldsymbol{S}_{W^T\Omega W} &:= \lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{n} \boldsymbol{W}_t^T u_t\Big) = \mathrm{plim}\,\frac{1}{n}\boldsymbol{W}^T\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{W} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\,\mathrm{E}(\boldsymbol{W}^T\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{W}) \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\,\mathrm{E}(\boldsymbol{W}^T\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{W}) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\mathrm{E}(\boldsymbol{W}_t^T u_t \boldsymbol{W}_s u_s), \qquad \mathrm{Var}\,(u_t) = \sigma^2.
\end{aligned}
\tag{27}
$$

Es sei $\boldsymbol{W}_t = z_t$ das einzige vorliegende Instrument. Ihnen liegen folgende Daten vor:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{W} = \boldsymbol{z} &= (0.2,\ -0.2,\ 0.3,\ 0.1,\ 0.4,\ 0.8)^T \\
\boldsymbol{y} &= (0.6,\ -0.8,\ -5.7,\ -2.9,\ -3.4,\ 1.4)^T \\
\boldsymbol{x} &= (-0.1,\ 0.9,\ -2.3,\ -2.4,\ 0.3,\ 1.1)^T.
\end{aligned}
$$

(a) (3 Punkte) Berechnen Sie den einfachen IV-Schätzer für β sowie die Residuen des Modells.

(b) (2 Punkte) Erläutern Sie, warum aus (27) **nicht**

$$\boldsymbol{S}_{W^T\Omega W} = \sigma^2\,\mathrm{E}(z_t^2) \tag{28}$$

folgt. Welche zusätzliche Annahme benötigen Sie hierfür? Berechnen Sie für den Fall (28) einen Schätzer $\widehat{\boldsymbol{S}}_{W^T\Omega W}$.

(c) (2 Punkte) Berechnen Sie $\widehat{\boldsymbol{S}}_{W^T\Omega W}$ unter der Annahme, dass eine Zufallsstichprobe vorliegt und

$$\mathrm{Var}\,(u_t|z_t) = \sigma_t^2 \neq \sigma^2, \quad t = 1,\dots,n \tag{29}$$

gilt.

(d) (3 Punkte) Berechnen Sie $\widehat{\boldsymbol{S}}_{W^T\Omega W}$, falls gilt

$$\mathrm{E}(u_t u_s|z_t, z_s)\begin{cases} \neq 0 & \text{falls } |t-s| \leq 1, \\ = 0 & \text{sonst,}\end{cases} \qquad t, s = 1,\dots,n$$

Wie könnte ein Schätzer für $\boldsymbol{S}_{W^T\Omega W}$ aussehen, falls alle Autokovarianzen von Null verschieden sind? (Im letzten Fall keine Berechnung nötig.)

(e) (2 Punkte) Berechnen Sie unter der Zufallsstichprobenannahme und (29) einen Schätzer für die Varianz von $\hat{\beta}_{IV}$.

(f) (4 Punkte) Berechnen Sie unter Annahme (29) und Instrumenten $\boldsymbol{W}_t = (z_t,\ z_t^2)$ den anwendbaren effizienten GMM-Schätzer.

(g) (4 Punkte) Testen Sie die Überidentifikationsrestriktion im letzten Fall.

(h) (1 Punkt) Können Sie unter den bisher getroffenen Annahmen jeweils einen vollständig effizienten GMM-Schätzer (GMM mit optimalen Instrumenten) konstruieren?

(i) (4 Punkte) Gehen Sie nun davon aus, dass $\mathrm{E}\, x_t|z_t = e^{z_t}$ und dass $\mathrm{Var}\,(u_t|z_t) = z_t^2$, $t = 1, \dots, n$. Bestimmen Sie ein transformiertes Modell mit homoskedastischen Residuen. Wie lautet hierfür das optimale Instrument? Berechnen Sie den "vollständig effizienten" GMM-Schätzer.

31. Aufgabe (21 Punkte) GMM: (**Mittelwertschätzung bei Heteroskedastie**)
Betrachten Sie im Folgenden das Modell

$$y_t = 1 \cdot \theta + u_t, \qquad \mathrm{E}\,[u_t|\Omega_t] = 0, \quad \mathrm{Var}\,(u_t|\Omega_t) = \gamma z_t, \quad z_t \sim \chi_1^2$$

und nehmen Sie zusätzlich an, dass eine Zufallsstichprobe vorliegt und dass $\gamma > 0$.

(a) (1 Punkt) Kann im vorliegenden Modell Autokorrelation der Fehler vorliegen?

(b) (3 Punkte) Berechnen Sie den KQ-Schätzer für θ. Geben Sie die asymptotische Verteilung an.

(c) (3 Punkte) Ist z_t ein valides Instrument zur Schätzung von θ, d.h. ist der korrespondierende einfache IV-Schätzer konsistent?

(d) (2 Punkte) Bestimmen Sie einen allgemeinen GMM-Schätzer gegeben die Instrumentenwahl $\boldsymbol{W}_t = (1; z_t)$ und Gewichtungsmatrix $\boldsymbol{\Lambda}$.

(e) (3 Punkte) Wie lautet die optimale Wahl von $\boldsymbol{\Lambda}$? Wie wird diese geschätzt, falls die Form von $\mathrm{Var}\,(u_t|\Omega_t)$ unbekannt ist?

(f) (1 Punkt) Formulieren Sie ein transformiertes Modell mit homoskedastischen Residuen.

(g) (3 Punkte) Wie lautet das optimale Instrument für diese Gleichung? Geben Sie den vollständig effizienten GMM-Schätzer an.

(h) (5 Punkte) Führen Sie eine Simulation durch, bei der Sie die Varianz von KQ-Schätzer, effizientem GMM-Schätzer und vollständig effizientem GMM vergleichen.

32. Aufgabe (13 Punkte) GMM: (**Verallgemeinerte Momentenschätzung** - Modell 1)
Betrachten Sie ein **dynamisch vollständig spezifiziertes** Modell mit **homoskedastischen** Fehlern

$$y_t = \boldsymbol{X}_t\boldsymbol{\beta} + u_t, \qquad \mathrm{E}\, u_t|\Omega_t = 0, \qquad \mathrm{Var}\,(u_t|\Omega_t) = \sigma^2, \tag{30}$$

$$\boldsymbol{S}_{W^T\Omega W} := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\, \mathrm{E}\, \boldsymbol{W}^T\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{W},$$

wobei $\boldsymbol{W}_t \in \Omega_t$ ein $(1 \times l)$ Instrumentenvektor und $\boldsymbol{X}_t \notin \Omega_t$ der $(1 \times k)$ Vektor **nicht** exogener Regressoren ist. Es gelte $l > k$.

(a) (2 Punkte) Klären Sie den Begriff der dynamisch vollständigen Spezifikation. Warum ist hierbei Autokorrelation in den Fehlern ausgeschlossen?

(b) (2 Punkte) Begründen Sie, wie sich der Ausdruck $\boldsymbol{S}_{W^T\Omega W}$ im vorliegenden Fall vereinfacht. Wie kann er geschätzt werden?

(c) (1 Punkt) Geben Sie für $\boldsymbol{\Lambda} = \frac{1}{n}\boldsymbol{I}$ den GMM-Schätzer $\hat{\boldsymbol{\beta}}_\Lambda$ an.

(d) (2 Punkte) Bringen Sie für $\boldsymbol{\Lambda} = \frac{1}{n}\boldsymbol{I}$ den Ausdruck $\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_\Lambda - \boldsymbol{\beta})$ in eine Form, die die asymptotische Analyse der einzelnen Faktoren dieses Ausdrucks erlaubt.

(e) (3 Punkte) Geben Sie für die einzelnen Faktoren präzise den Grenzwert in Wahrscheinlichkeit bzw. die asymptotische Verteilung unter den in (30) genannten (und weiteren üblichen) Annahmen an.

(f) (2 Punkte) Leiten Sie daraus die asymptotische Verteilung von $\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_\Lambda - \boldsymbol{\beta})$ her.

(g) (1 Punkt) Für welches $\boldsymbol{\Lambda}$ erhalten Sie für den vorliegenden Fall einen effizienten Schätzer?

33. Aufgabe (8 Punkte) GMM: (**Verallgemeinerte Momentenschätzung**) - Modell 2

Gegeben sei ein lineares Modell mit einem Regressor unter der Zufallsstichprobenannahme

$$y_t = \beta x_t + u_t, \qquad \mathrm{E}\, u_t|\Omega_t = 0,$$

wobei $x_t \notin \Omega_t$, aber $w_t \in \Omega_t$ gilt. Der Fehler weist Heteroskedastie, aber keine Autokorrelation auf ($\mathrm{E}\, u_t u_s|w_t, w_s = 0$ für $s \neq t$, aber $\mathrm{E}\, u_t^2|w_t = \omega_{tt}$). Sie beobachten Daten

$$\boldsymbol{y} = (1,\ 3,\ 4,\ 3)^T, \qquad \boldsymbol{x} = (2,\ 3,\ 2,\ 3)^T, \quad \text{und} \qquad \boldsymbol{w} = (2,\ 3,\ 1,\ 3)^T.$$

(a) (1 Punkt) Berechnen Sie den einfachen IV-Schätzer. [Ersatzergebnis $\hat{\beta}_{IV} = 2$]

(b) (2 Punkte) Berechnen Sie einen heteroskedastierobusten Schätzer für die Varianz des IV-Schätzers.

(c) (2 Punkte) Ein Kollege rät Ihnen, aus Effizienzgründen für das vorliegende Modell entweder (i) den vollständig effizienten GMM-Schätzer, oder doch zumindest (ii) den anwendbaren effizienten GMM-Schätzer zu berechnen. Was entgegnen Sie ihm? Es ist keine Berechnung erforderlich!

(d) (2 Punkte) Berechnen Sie den vollständig effizienten GMM-Schätzer unter der Annahme, dass nun $x_t \in \Omega_t$ und $\mathrm{Var}\,(u_t|x_t) = 4x_t^2$.

(e) (1 Punkt) Geben Sie für diesen EGMM-Schätzer numerisch den Vektor des optimalen Instruments für das Modell in Ausgangsvariablen an.

34. Aufgabe (26 Punkte) GMM: (**Verallgemeinerte Momentenschätzung**) - Modell 3

Betrachten Sie ein lineares Modell unter Annahme einer Zufallsstichprobe,

$$y_t = \boldsymbol{X}_t\boldsymbol{\beta} + u_t, \qquad \mathrm{E}\, u_t|\Omega_t = 0, \qquad t = 1, \dots, n, \tag{31}$$

$$\boldsymbol{S}_{W^T\Omega W} := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} \mathrm{E}\, \boldsymbol{W}_t^T u_t \boldsymbol{W}_s u_s,$$

wobei $\boldsymbol{W}_t \in \Omega_t$ ein $(1 \times l)$ Instrumentenvektor und $\boldsymbol{X}_t \notin \Omega_t$ der $(1 \times k)$ Vektor **nicht** exogener Regressoren ist.

(a) (2 Punkte) Durch welche der Annahmen ist Autokorrelation in den Fehlern ausgeschlossen?

(b) (4 Punkte) Zeigen Sie, dass für $l = k$ der GMM-Schätzer mit Gewichtungsmatrix $\boldsymbol{\Lambda}$ dem einfachen IV-Schätzer entspricht. Hinweis: $(\boldsymbol{AB})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$, falls $\boldsymbol{B}^{-1}$ und $\boldsymbol{A}^{-1}$ existieren.

(c) (4 Punkte) Zeigen Sie für $l = k$, dass der einfache IV-Schätzer konsistent ist.

(d) (6 Punkte) Geben Sie für folgende Terme den Grenzwert für $n \to \infty$ unter Standardannahmen an (Grenzwert in Wahrscheinlichkeit / asymptotische Verteilung / "divergiert"). Es gelte die Notation aus der Vorlesung.

(i) $\frac{1}{n}\boldsymbol{W}^T\boldsymbol{u}$ (ii) $\frac{1}{\sqrt{n}}\boldsymbol{W}^T\boldsymbol{u}$

(iii) $\frac{1}{n}\boldsymbol{W}^T\boldsymbol{X}$ (iv) $\frac{1}{n}\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{P_W}\boldsymbol{X}$

(e) (2 Punkte) Der Schätzer $\widehat{\boldsymbol{S}}_{W^T\Omega W} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\boldsymbol{W}_t^T\boldsymbol{W}_t u_t^2$ ist konsistent für $\boldsymbol{S}_{W^T\Omega W}$. Welches Problem hat der Schätzer in der praktischen Anwendung und wie kann dieses umgangen werden?

(f) (3 Punkte) Erklären Sie kurz, was sich bei der Schätzung von $\boldsymbol{S}_{W^T\Omega W}$ ändert, falls die Zufallsstichprobenannahme aufgehoben wird und $\mathrm{E}\, u_t u_s \boldsymbol{W}_t^T\boldsymbol{W}_s \neq \boldsymbol{0}$ für einige $s \neq t$.

(g) (5 Punkte) Es ist nun (bei Vorliegen einer Zufallsstichprobe) zusätzlich bekannt, dass

$$\omega_{tt} := \mathrm{Var}\,(u_t|\Omega_t) = [2 + \sin(t)]^2 \quad \text{und}$$
$$\bar{\boldsymbol{X}}_t := \mathrm{E}\,\boldsymbol{X}_t|\Omega_t = \boldsymbol{W}_t\boldsymbol{\Gamma}.$$

Dabei ist $\boldsymbol{\Gamma}$ eine bekannte $(l \times k)$ Matrix. Geben Sie an, wie Sie einen vollständig effizienten Schätzer konstruieren können.

35. Aufgabe (17 Punkte) GMM: (**Verallgemeinerte Momentenschätzung**) - Modell 4

Betrachten Sie ein lineares Modell unter Annahme einer Zufallsstichprobe,

$$y_t = \boldsymbol{X}_t\boldsymbol{\beta} + u_t, \qquad \mathrm{E}\, u_t|\Omega_t = 0, \qquad t = 1, \dots, n, \tag{32}$$

$$\boldsymbol{S}_{W^T\Omega W} := \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\mathrm{E}\,\boldsymbol{W}_t^T u_t \boldsymbol{W}_s u_s, \tag{33}$$

wobei $\boldsymbol{W}_t \in \Omega_t$ ein $(1 \times l)$ Instrumentenvektor und $\boldsymbol{X}_t \notin \Omega_t$ der $(1 \times k)$ Vektor **nicht** vorherbestimmter Regressoren ist.

(a) (2 Punkte) Bestimmen Sie $\boldsymbol{m}(\boldsymbol{\beta}; \boldsymbol{y}, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{W})$, so dass sich die theoretische Momentenbedingungen des Modells als $\mathrm{E}\,\boldsymbol{m}(\boldsymbol{\beta}_0; \boldsymbol{y}, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{W}) = 0$ mit $\lim_{n\to\infty}\mathrm{Var}\,(m(\boldsymbol{\beta}_0; \boldsymbol{y}, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{W})) = \boldsymbol{S}_{W^T\Omega W}$ darstellen lässt.

(b) (2 Punkte) Geben Sie für allgemeine Gewichtungsmatrix $\boldsymbol{\Lambda}$ die GMM-Zielfunktion in Abhängigkeit vom $\boldsymbol{m}(\boldsymbol{\beta}; \boldsymbol{y}, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{W})$ an. Erläutern Sie im Fall $l > k$ die Intuition hinter GMM.

(c) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass unter den getroffenen Annahmen gilt $\mathrm{E}\, u_t w_{t1} = 0$.

(d) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass für $l = k$ der GMM-Schätzer dem einfachen IV-Schätzer entspricht.

(e) (2 Punkte) Zu welchen Zwecken benötigen Sie einen Schätzer für $\boldsymbol{S}_{W^T\Omega W}$ bei der GMM-Schätzung?

(f) (2 Punkte) Geben Sie für den vorliegenden Fall einen konsistenten Schätzer für $\boldsymbol{S}_{W^T\Omega W}$ an.

(g) (3 Punkte) Es ist nun zusätzlich bekannt, dass

$$\begin{aligned}\omega_{tt} &:= \operatorname{Var}(u_t|\Omega_t) = w_{t2}^2 \quad \text{und}\\ \bar{\boldsymbol{X}}_t &:= \operatorname{E}\boldsymbol{X}_t|\Omega_t = \boldsymbol{W}_t\boldsymbol{\Gamma}.\end{aligned}$$

Dabei ist $\boldsymbol{\Gamma}$ eine bekannte $(l \times k)$ Matrix. Geben Sie an, wie Sie einen vollständig effizienten Schätzer konstruieren können.

(h) (2 Punkte) Erklären Sie kurz, was sich bei der (nicht vollständig) effizienten GMM-Methode ändert, falls die Zufallsstichprobenannahme aufgehoben wird, $\operatorname{E} u_t|\boldsymbol{W}_t = 0$ und $\operatorname{E} u_t u_s \boldsymbol{W}_t^T \boldsymbol{W}_s \neq \boldsymbol{0}$ für einige $s \neq t$.

36. Aufgabe (21 Punkte) GMM: (**Weizenaussaat**)

Die Entscheidung der Aussaatmenge ($saat_t$) von Weizen im Jahr t hängt ab vom erwarteten Weizenpreis des nächsten Jahres $\operatorname{E}_t(wzpreis_{t+1})$ und den Kosten der Aussaat, approximiert durch einen Index aus Löhnen im Agrarsektor, Preise für Saatgut etc. ($kosten_t$). Ein ökonometrisches Modell ist

$$saat_t = \beta_1 + \beta_2 wzpreis_{t+1} + \beta_3 kosten_t + u_t, \quad t = 1, 2, \ldots, n. \tag{34}$$

Nehmen Sie an, dass gilt

$$\operatorname{E}[u_t|wzpreis_t, wzpreis_{t-1}, \ldots, kosten_{t-1}, kosten_{t-2}, \ldots] = 0, \tag{35}$$

$$\operatorname{E}[u_t u_{t-j}|wzpreis_t, wzpreis_{t-1}, \ldots, kosten_{t-1}, kosten_{t-2}, \ldots] = \begin{cases} 0 & \text{für } j \geq 1 \\ \sigma^2 & \text{für } j = 0. \end{cases} \tag{36}$$

(a) (4 Punkte) Geben Sie zwei Gründe an, warum in diesem Beispiel $\operatorname{E}[u_t|wzpreis_{t+1}, kosten_t] = 0$ verletzt sein könnte.

(b) (1 Punkt) Erläutern Sie kurz die Bedeutung der Annahme (36).

(c) (4 Punkte) Welche Rolle spielen die Annahmen (35) und (36) jeweils für die Interpretierbarkeit der Schätzergebnisse eines verallgemeinerten Instrumentvariablenschätzers?

(d) (5 Punkte) Sie sollen sich für die IV-Schätzung zwischen den Instrumentenvektoren $\boldsymbol{Z}_t = (1,\ wzpreis_t,$
$kosten_{t-1})$ und $\boldsymbol{W}_t = (1,\ wzpreis_t,\ wzpreis_{t-1},\ kosten_{t-1},\ kosten_{t-2})$ entscheiden. Treffen und begründen Sie die Entscheidung anhand des folgenden Outputs. Welche Folgen hätte eine Fehlentscheidung?

```
Linear hypothesis test

Hypothesis:
wzpreis.lag1 = 0
```

```
kosten.lag2 = 0

Model 1: restricted model
Model 2: kosten ~ wzpreis + kosten.lag1 + wzpreis.lag1 + kosten.lag2

  Res.Df    RSS Df Sum of Sq      F    Pr(>F)
1    245 412.73
2    243 364.61  2    48.123 16.036 2.873e-07 ***
---
Signif. codes:  0 *** 0.001 ** 0.01 * 0.05 . 0.1   1
```

Die Annahme (36) wird nun aufgehoben. Es gelte stattdessen

$$\mathrm{E}\, u_t u_{t-j} | wzpreis_t, wzpreis_{t-1}, \ldots, kosten_{t-1}, kosten_{t-2}, \ldots = \omega_{t,t-j}. \tag{37}$$

Ihnen liegt das folgende Schätzergebnis vor.

```
Call:
gmm(g = saat ~ wzpreis.lead1 + kosten, x = cbind(wzpreis, kosten.lag1,
    wzpreis.lag1, kosten.lag2), kernel = "Parzen", bw = 6)

Method:  twoStep

Kernel:  Parzen

Coefficients:
              Estimate     Std. Error   t value      Pr(>|t|)
(Intercept)     8.5549e-01   1.0252e-01   8.3445   7.1526e-17
wzpreis.lead1   6.1301e-02   2.8117e-02   2.1802   2.9243e-02
kosten         -9.0921e-02   2.1647e-02  -4.2001   2.6675e-05

J-Test: degrees of freedom is 2
                J-test      P-value
Test E(g)=0:    11.9389407   0.0025556
```

(e) (1 Punkt) Benennen Sie präzise die verwendete Schätzmethode.

(f) (4 Punkte) Geben Sie die Hypothesen und die Tetstatistik des Tests auf überidentifizierende Restriktionen (`J-Test`) an. Wie lautet das Testergebnis im vorliegenden Fall?

(g) (2 Punkte) Welche zusätzlichen Informationen benötigen Sie, um einen vollständig effizienten Schätzer zu berechnen?

37. Aufgabe (0 Punkte) GMM: **(Ein kleines Beispiel)**

Es sei ein lineares Modell $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{u}$ und eine $n \times l$ Instrumentenmatrix $\boldsymbol{W}$ mit $\mathrm{E}\, u_t | \Omega_t = \mathrm{E}\, u_t | \boldsymbol{W}_t = 0$ gegegeben. Es liege eine Zufallsstichprobe vor.

(a) (Punkte) Geben Sie eine Zielfunktion an, die der allgemeine (ineffiziente) GMM-Schätzer für $\boldsymbol{\beta}$ minimiert. (1 Punkte)

(b) (Punkte) Zeigen Sie, dass für $u_t | \Omega_t \sim (0; \sigma^2)$ der effiziente GMM-Schätzer dem verallgemeinerten IV-Schätzer entspricht. (1 Punkt) Nehmen Sie nun an, dass $k = 1$ und $\mathrm{E}\, u_t^2 | \Omega_t = \frac{1}{w_{1t}^2}$.

(c) (Punkte) Wie lautet der effiziente GMM-Schätzer in Abhängigkeit der y_t, $\boldsymbol{X}_t$ und $\boldsymbol{W}_t$ (kein $\boldsymbol{\Omega}$)?

(d) (Punkte) Wie lautet der vollständig effiziente GMM-Schätzer in Abhängigkeit der y_t, $\boldsymbol{X}_t$ und $\boldsymbol{W}_t$ (kein $\boldsymbol{\Omega}$)?

38. Aufgabe (35 Punkte) GMM: (**Neukeynesianische Phillipskurve**)

Die neukeynesianische Phillipskurve wird in ihrer linearen Form dargestellt als

$$\pi_t = \lambda mc_t + \gamma_f \operatorname{E} \pi_{t+1} | \Omega_t \tag{38}$$

Hier ist π_t die Inflationsrate der Periode t und mc_t bezeichnet die marginalen Produktionskosten in der Ökonomie, λ und γ_f sind der Theorie nach positive Parameter. Für eine Herleitung siehe etwa Romer (2005), für den nachfolgenden empirischen Ansatz insbesondere Galí & Gertler (1999).

Sie sollen nun diesen Zusammenhang mithilfe eines ökonometrischen Modells überprüfen und quantifizieren, wobei der Lohnanteil ws_t die marginalen Kosten approximieren soll (siehe Galí & Gertler 1999).

$$\pi_t = \lambda ws_t + \gamma_f \pi_{t+1} + u_t \tag{39}$$

Der Datensatz `nkpc_data.csv` enthält quartalsweise US-Daten, unter anderem zu

inf	Quartalsweise Inflationsrate des GDP-Deflators
ws	Logarithmierter Anteil des Arbeitseinkommens am GDP
outp_gap	Quadratisch trendbereinigtes log GDP
wageinf	Quartalswachstumsrate des aggregierten Lohnniveaus
lspread	Logarithmierter Spread zwischen langfristigen und kurzfristigen Zinsen
variable.l...	Lags der jeweiligen Variable
variable.p...	Lead der jeweiligen Variable.

(a) (4 Punkte) Erläutern Sie, warum $\operatorname{E} u_t \pi_{t+1} \neq 0$. Warum könnte $mc_t \in \Omega_t$ verletzt sein?

(b) (1 Punkt) Laden Sie die Daten in `R`. Schränken Sie die Stichprobe ein auf 1965-01-01 bis einschließlich 1999-12-31.

(c) (1 Punkt) Führen Sie eine verallgemeinerte Instrumentvariablenschätzung der Parameter γ_f und λ in (38) durch. Verwenden Sie als Instrumente jeweils die ersten 4 Lags aller verfügbarer Variablen.

(d) (3 Punkte) Welche Voraussetzungen müssen valide Instrumente erfüllen? Halten Sie die Instrumente im vorliegenden Schätzansatz für geeignet? (Begründung bzw. Schätzung erforderlich!) Modifizieren Sie gegebenenfalls die Menge von Instrumenten.

(e) (2 Punkte) Betrachten Sie nun die Residuen. Sind die Standardfehler und t-Statistiken verwendbar?

(f) (5 Punkte) Schätzen Sie nun dasselbe Modell mit der anwendbaren effizienten verallgemeinerten Momentenmethode. In `R` können Sie hierzu die `gmm` Funktion des gleichnamigen

Pakets verwenden. Verwenden Sie den Newey-West HAC Schätzer mit 12 Lags.[6] Interpretieren Sie das Ergebnis.

(g) (3 Punkte) Erläutern Sie die Bedeutung der sogenannten `J-statistic`. Was sagt sie in diesem Fall aus?

Eine Hybride Version der Phillipskurve, die rationale mit rückwärtsgewandter Preissetzung vereint, ist

$$\pi_t = \lambda mc_t + \gamma_f \operatorname{E} \pi_{t+1}|\Omega_t + \gamma_b \pi_{t-1} \tag{40}$$

Schätzen Sie auch diese Spezifikation.

(h) (4 Punkte) Testen Sie, ob rückwärtsgewandte Preissetzung relevant ist. In welchem Bezug steht dieser Test zum Test auf überidentifizierende Restriktionen

(i) (3 Punkte) Versuchen Sie die GMM-Schätzung mit unterschielichen Instrumentenmatrizen. Verwenden Sie unterschiedliche Zeithorizonte für die Schätzung. Verwenden Sie andere HAC Schätzer und Bandweiten. Ist das Ergebnis robust?

In ihrer eigentlichen Form gehen die Verhaltensparameter θ und β (und, für die hybride Phillipskurve, ω) nichtlinear in die Preissetzungsgleichung ein. Die Variablen erfüllen dann für die neukeynesianische Phillipskurve (siehe Galí & Gertler 1999)

$$\operatorname{E} \boldsymbol{W}_t^T(\theta\pi_t - (1-\beta\theta)ws_t - \beta\theta\pi_{t+1}) = 0, \tag{41}$$

während bei der hybriden Version die Momentenbedingungen gegeben sind durch

$$\operatorname{E} \boldsymbol{W}_t^T(\phi\pi_t - (1-\omega)(1-\theta)(1-\beta\theta)ws_t - \beta\theta\pi_{t+1}) - \omega\pi_{t-1} = 0 \tag{42}$$

mit $\phi := \theta + \omega[1-\theta(1-\beta)]$.

(j) (3 Punkte) Erzeugen Sie in `R` eine Funktion `est_fun`, die in Abhängigkeit eines Parametervektors $(\theta\,\beta\,\omega)^T$ (Argument `theta`) und eines Datensatzes `data` eine $(n \times l)$-Matrix mit t-ter Zeile $\boldsymbol{W}_t(\phi\pi_t - (1-\omega)(1-\theta)(1-\beta\theta)ws_t - \beta\theta\pi_{t+1}) - \omega\pi_{t-1})$ ausgibt.

(k) (3 Punkte) Verwenden Sie diese Funktion für eine nichtlineare GMM-Schätzung der nichtlinearen neukeynesianischen Phillipskurve.

(l) (3 Punkte) Wiederholen Sie dies für die hybride Version und vergleichen Sie das Ergebnis.

[6] "The estimator of Newey & West (1987) is a special case of the class of estimators introduced by Andrews (1991). It can be obtained using the "Bartlett"kernel and setting bw to lag + 1." (vgl. Hilfe zu kernHAC)

39. Aufgabe (30 Punkte) ML: (**Poissonverteilung**)

Man betrachte die poisson-verteilten Zufallsvariablen y_t, $t = 1, 2, ..., n$, die einer Zufallsstichprobe entstammen. Die Dichte der Poisson-Verteilung lautet:

$$f_{y_t}(y|\theta) = \begin{cases} \frac{\theta^y}{y!} e^{-\theta} & y = 0, 1, 2, 3, ... \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Der "wahre" Parameterwert des DGP ist θ_0. Es gilt $\mathrm{E}_0(y_t) = \mathrm{Var}_0(y_t) = \theta_0$, wobei E_0 und Var_0 Erwartungswert und Varianz unter dem tatsächlichen DGP bezeichnen.

(a) (3 Punkte) Wie lautet die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsfunktion $f(y_1, y_2, ..., y_n|\theta_0)$?

(b) (3 Punkte) Bestimmen Sie die Log-Likelihoodfunktion $l(\theta|\boldsymbol{y})$.

(c) (2 Punkte) Berechnen Sie den Score (bzw. Gradienten) $g(\theta, \boldsymbol{y}) := \frac{\partial l(\theta|\boldsymbol{y})}{\partial \theta}$.

(d) (2 Punkte) Berechnen Sie die Hessematrix (hier skalar) $H(\theta) = \frac{\partial^2 l(\theta|\boldsymbol{y})}{\partial \theta^2}$.

(e) (4 Punkte) Zeigen Sie, dass gilt

$$\left.\frac{\partial\, \mathrm{E}_0[l(\theta|\boldsymbol{y})]}{\partial \theta}\right|_{\theta=\theta'} = \mathrm{E}_0[g(\theta', \boldsymbol{y})].$$

(f) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass gilt

$$\theta_0 = \underset{\theta}{\mathrm{argmax}}\ \mathrm{E}_0(l(\theta|\boldsymbol{y})).$$

(g) (2 Punkte) Wie lautet der Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{\theta}_{ML}$?

(h) (2 Punkte) Inwiefern lässt sich der ML-Schätzer als GMM-Schätzer interpretieren? (2 Punkte)

(i) (2 Punkte) Wie lautet die Varianz des ML-Schätzers? (2 Punkte)

(j) (2 Punkte) Geben Sie einen Schätzer für die Varianz des ML-Schätzers an. (2 Punkte)

(k) (5 Punkte) Geben Sie 3 verschiedene Möglichkeiten an, die Varianz allgemeiner ML-Schätzer zu schätzen. Bestimmen Sie diese für das vorliegende Modell. (5 Punkte)

40. Aufgabe (49 Punkte) ML: (**Exponentialverteilung**)

Sie beobachten Daten $\boldsymbol{y} = (0.37,\ 0.13,\ 0.53,\ 0.04,\ 0.14)^T$, die als Zufallsstichprobe einer exponentialverteilten Variablen modelliert werden. Die Dichte lautet

$$f_{y_t}(y|\theta_0) = \begin{cases} \theta_0 e^{-\theta_0 y} & y > 0 \\ 0 & y \leq 0 \end{cases}.$$

Der "wahre" Parameterwert des DGP ist θ_0. Es gilt

$$\mathrm{E}_0(y_t) = \frac{1}{\theta_0}, \qquad \mathrm{Var}_0(y_t) = \frac{1}{\theta_0^2},$$

wobei E_0 und Var_0 Erwartungswert und Varianz unter dem tatsächlichen DGP bezeichnen.

(a) (3 Punkte) Berechnen Sie die gemeinsame Dichte $f_{\boldsymbol{y}}(y_1, y_2, \ldots, y_n|\theta_0)$ sowie die Log-Likelihood $l(\theta|\boldsymbol{y})$.

(b) (3 Punkte) Ist der ML-Schätzer $\hat{\theta}_{ML}$ für jede gegebene Stichprobe global bzw. lokal identifiziert?

(c) (6 Punkte) Ist der Parameter θ_0 global bzw. lokal identifiziert?

(d) (3 Punkte) Berechnen Sie plim $\frac{1}{n}l(\theta|\boldsymbol{y})$. Welche Aussagen lassen sich über asymptotische Identifikation von θ_0 treffen?

(e) (5 Punkte) Geben Sie die Fisher-Information $\mathbf{I}(\theta)$ an. Bestimmen Sie die asymptotische Fisher-Information $\mathcal{I}(\theta)$.

(f) (3 Punkte) Berechnen Sie die Hessematrix (hier skalar) $\mathbf{H}(\theta)$ und die asymptotische Hessematrix $\mathcal{H}(\theta)$.

(g) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass die asymptotische Informationsmatrixgleichheit gilt.

Sie wollen anhand des gegebenen Datensatzes die Hypothese

$$H_0: \quad \theta = 5 \quad \text{vs.} \quad H_1: \quad \theta \neq 5$$

testen.

(h) (3 Punkte) Berechnen Sie den Schätzer $\hat{\theta}_{ML}$.

(i) (4 Punkte) Geben Sie drei mögliche Schätzer für die Varianz des ML-Schätzers an. Entscheiden Sie sich für einen.

(j) (5 Punkte) Berechnen Sie die Wald-Teststatistik.

(k) (5 Punkte) Wie lautet die Teststatistik des Likelihood-Ratio-Tests?

(l) (5 Punkte) Bestimmen Sie die Teststatistik des Lagrange-Multiplikatortests.

(m) (3 Punkte) Treffen Sie jeweils eine Testentscheidung.

41. Aufgabe (12 Punkte) ML: (**Normalverteilung mit Erwartungswertparameter**)
Die Zufallsvariablen y_t, $t = 1, \ldots, n$ entstammen einer Zufallsstichprobe. Ihre Dichte ist gegeben durch

$$f_{y_t}(y;\theta) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(y-\theta)^2} \quad \text{mit } \mathrm{E}[y_t]_0 = \theta_0 \quad \text{und } \mathrm{Var}\,(y_t)_0 = 1.$$

wobei θ_0 der Parameter des datengenerierenden Prozesses ist. $\mathrm{E}[]_0$ und $\mathrm{Var}\,()_0$ ($\mathrm{E}[]_\theta$ und $\mathrm{Var}\,()_\theta$) sind Erwartungswert, Varianz und Wahrscheinlichkeitslimes unter θ_0 (unter θ).

(a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass die Log-Likelihood gegeben ist durch

$$l(\theta; y_1, \ldots, y_n) = -\frac{n}{2}\log(2\pi) - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{n}(y_t - \theta)^2. \qquad \text{(2 Punkte)}$$

(b) (1 Punkt) Berechnen Sie den Gradienten (bzw. Score) $g(\theta; y_1, \ldots, y_n)$.

(c) (3 Punkte) Bestimmen Sie die Fisher-Information $I(\theta) = \mathrm{Var}\,(g(\theta; y_1, \ldots, y_n))_\theta$.

(d) (2 Punkte) Zeigen Sie die asymptotische Informationsmatrixgleichheit $\mathcal{I}(\theta_0) = -\mathcal{H}(\theta_0)$ im vorliegenden Fall.

Sie beobachten eine Stichprobe $\boldsymbol{y} = (3.8,\ 1.2,\ 3.1,\ 2.0,\ 1.2,\ 1.9)^T$.

(e) (1 Punkt) Berechnen Sie den ML-Schätzer für θ.

(f) (1 Punkt) Geben Sie für die vorliegende Stichprobe **eine** Schätzung für $\mathrm{Var}\left(\hat{\theta}_{ML}\right)$ an.

(g) (2 Punkte) Führen Sie einen Wald-Test der folgenden Hypothese durch:

$$H_0: \quad \theta_0 = 1.$$

42. Aufgabe (37 Punkte) ML: (**Normalverteilung mit Präzisionsparameter**)

Die Zufallsvariablen y_t, $t = 1, \ldots, n$ entstammen einer Zufallsstichprobe. Ihre Dichte ist gegeben durch

$$f_{y_t}(y|\theta) = \frac{\theta^{\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \mathrm{e}^{-\frac{\theta}{2}y^2},$$

wobei θ_0 der Parameter des datengenerierenden Prozesses ist. E_0, Var_0 und plim_0 sind Erwartungswert, Varianz und Wahrscheinlichkeitslimes unter dem DGP. Es gilt

$$\mathrm{E}(y_t) = 0, \qquad \mathrm{Var}_0(y_t) = \mathrm{E}_0(y_t^2) = \frac{1}{\theta_0}, \qquad \mathrm{Var}_0(y_t^2) = \frac{2}{\theta_0^2}.$$

(a) (4 Punkte) Zeigen Sie, dass die Log-Likelihood gegeben ist durch

$$l(\theta|y_1, \ldots, y_n) = -\frac{n}{2}\log(2\pi) + \frac{n}{2}\log(\theta) - \frac{\theta}{2}\sum_{t=1}^{n} y_t^2.$$

(b) (3 Punkte) Berechnen Sie den Gradienten (bzw. Score) $g(\theta, y_1, \ldots, y_n)$. [Falls Sie kein Ergebnis erhalten, verwenden Sie im Folgenden $g(\theta, y_1, \ldots, y_n) = n\theta^{-1} - \sum_{t=1}^{n} y_t^2$.]

(c) (5 Punkte) Bestimmen Sie die Hessematrix $H(\theta)$ sowie die asymptotische Hessematrix $\mathcal{H}(\theta) := \underset{n\to\infty}{\mathrm{plim}_0} \frac{1}{n} H(\theta)$.

(d) (4 Punkte) Bestimmen Sie die asymptotische Fisher-Information $\mathcal{I}(\theta_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \mathrm{Var}_0(g(\theta_0, \boldsymbol{y}))$.

(e) (4 Punkte) Bestimmen Sie die Fisher-Information $I(\theta) = \mathrm{Var}\left(g(\theta; y_1, \ldots, y_n)\right)_\theta$.

(f) (4 Punkte) Zeigen Sie für den vorliegenden Fall, dass

$$\theta_0 = \underset{\theta}{\mathrm{argmax}}\ \mathrm{E}_0(l(\theta|y_1, \ldots, y_n)).$$

Sie beobachten eine Stichprobe $\boldsymbol{y} = (-4.8,\ 10.6,\ -5.0,\ 2.0,\ -1.5)^T$.

(g) (3 Punkte) Berechnen Sie den ML-Schätzer für θ.

(h) (3 Punkte) Wie kann man allgemein die Varianz von ML-Schätzern schätzen? Nennen Sie 3 Möglichkeiten.

(i) (3 Punkte) Geben Sie für die vorliegende Stichprobe **eine** Schätzung für $\mathrm{Var}(\hat{\theta}_{ML})$ an.

(j) (4 Punkte) Führen Sie einen Likelihood-Ratio-Test der folgenden Hypothese durch:

$$H_0: \quad \theta_0 = 1.$$

43. Aufgabe (28 Punkte) ML: (**Bernoulliverteilung**)

Die Zufallsvariablen y_t, $t = 1, \ldots, n$ entstammen einer Zufallsstichprobe ($y_t \sim IID$). Sie nehmen den Wert 1 an mit Wahrscheinlichkeit θ und den Wert 0 mit Wahrscheinlichkeit $1-\theta$, folgen also einer Bernoulliverteilung. Die Wahrscheinlichkeitsfunktion lautet

$$f(y;\theta) = \begin{cases} \theta y + (1-\theta)(1-y) & y \in \{0,1\} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

θ_0 sei der Parameter des datengenerierenden Prozesses, $\mathrm{E}[]_0$, $\mathrm{Var}\,()_0$ und $\mathrm{plim}\ _0$ sind Erwartungswert, Varianz und Wahrscheinlichkeitslimes unter dem DGP. Es gilt

$$\mathrm{E}[y_t]_0 = \theta_0, \qquad \mathrm{Var}\,(y_t)_0 = \theta_0(1-\theta_0).$$

Die Log-Likelihood ist gegeben durch

$$l(\theta; y_1, \ldots, y_n) = \log(\theta) \sum_{t=1}^{n} y_t + \log(1-\theta)(n - \sum_{t=1}^{n} y_t).$$

(a) (4 Punkte) Berechnen Sie den Gradienten (bzw. Score) $g(\theta; y_1, \ldots, y_n)$.

Die Hessematrix lautet

$$H(\theta; y_1, \ldots, y_n) = -\frac{\sum_{t=1}^{n} y_t}{\theta^2} - \frac{n - \sum_{t=1}^{n} y_t}{(1-\theta)^2}.$$

(b) (6 Punkte) Zeigen Sie für den vorliegenden Fall, dass

$$\theta_0 = \underset{\theta}{\mathrm{argmax}}\ \mathrm{E}[]0[l(\theta; y_1, \ldots, y_n)].$$

(c) (5 Punkte) Berechnen Sie $\mathcal{H}(\theta_0) = \mathrm{plim}\ _0 \frac{1}{n} H(\theta_0; y_1, \ldots, y_n)$.

Sie beobachten eine Stichprobe

$$\boldsymbol{y} = (0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0)'.$$

(d) (3 Punkte) Berechnen Sie den ML-Schätzer für θ.

(e) (5 Punkte) Wie kann man allgemein die Varianz von ML-Schätzern schätzen? Nennen Sie 3 Möglichkeiten. Geben Sie **eine** Schätzung für $\mathrm{Var}\,(()\,\hat{\theta})$ an.

(f) (5 Punkte) Führen Sie einen Likelihood-Ratio-Test der folgenden Hypothese durch:

$$H_0: \ \theta_0 = 0.5.$$

44. Aufgabe (38 Punkte) ML: (**Poissonregression**)

Bei der Poisson-Regression ist der Parameter λ von erklärenden Variablen abhängig, man setzt also im Fall mit nur einem Regressor

$$\lambda_t = e^{\theta_1 + \theta_2 x_t}.$$

Der Parametervektor, der den wahren DGP charakterisiert, wird mit $\boldsymbol{\theta}_0 = (\theta_{01} \quad \theta_{02})'$ bezeichnet.

(a) (Punkte) Berechnen Sie $\mathrm{E}[y_t|x_t]$ sowie $\mathrm{Var}\,(y_t|x_t)$.

(b) (5 Punkte) Berechnen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeitsfunktion $f(y|x;\boldsymbol{\theta})$. Wie lautet die bedingte Log-Likelihoodfunktion $l(\boldsymbol{\theta};\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x})$?

(c) (5 Punkte) Geben Sie $\mathrm{E}[l(\boldsymbol{\theta};\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x})|\boldsymbol{x}]_0$ (in Abhängigkeit von x, $\boldsymbol{\theta}$ und $\boldsymbol{\theta}_0$) an. $\mathrm{E}[]0$ bedeutet, dass dem Erwartungswert die wahre bedingte Wahrscheinlichkeitsfunktion zugrundeliegt. Wie lautet der Wert für $\boldsymbol{\theta}$, der diesen Ausdruck maximiert?

(d) (5 Punkte) Bestimmen Sie den Gradientenvektor

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{\theta};\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}) = \frac{\partial l(\boldsymbol{\theta};\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \quad \text{und die Hessematrix} \quad \boldsymbol{H}(\boldsymbol{\theta};\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}) = \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta};\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{\theta}\partial \boldsymbol{\theta}^T}.$$

(e) (5 Punkte) Mit $\mathrm{E}[]_\theta$ ist nun der Erwartungswert unter dem DGP gemeint, der durch $\boldsymbol{\theta}$ charakterisiert ist. Zeigen Sie, dass für $\boldsymbol{I}(\boldsymbol{\theta}) := \mathrm{E}[\boldsymbol{g}(\boldsymbol{\theta};.)\boldsymbol{g}(\boldsymbol{\theta})^T|\boldsymbol{x}]_\theta = \mathrm{Var}\,(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{\theta})|\boldsymbol{x})_\theta$ gilt

$$-\boldsymbol{H}(\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{I}(\boldsymbol{\theta}).$$

(f) (Punkte) Laden Sie den Datensatz `DoctorVisits` aus dem AER Paket (via `data("DoctorVisits")`). Stellen Sie die Variablen graphisch dar.

(g) (5 Punkte) Schreiben Sie nun die oben in b) berechnete Likelihood als Funktion (des Parametervektors und der Daten) in R. `LogLik <- function(theta,y,x) ...`

(h) (5 Punkte) Versuchen Sie, die Likelihood für das Regressionsmodell

$$\mathrm{E}[visits_t|income_t] = \exp(\theta_1 + \theta_2\, income_t)$$

für verschiedene Parameterwerte in $\boldsymbol{\Theta} = [-1;1] \times [-1;1]$ zu berechnen. Verwenden Sie eine Doppelschleife, wobei die Werte in eine Matrix geschrieben werden. Wo ungefähr liegt das Minimum? Stellen Sie die Likelihood nahe des Minimums graphisch als Contour-Plot mittels `contour`-Befehl dar.

Beispielcode:

```
grid.size <- 100
th1 <- seq(-1,1,length=grid.size)
th2 <- seq(-1,1,length=grid.size)
LL <- matrix(0,grid.size,grid.size)
for(i in 1:grid.size)
{
```

```
for (j in 1:grid.size)
{
LL[i,j] <- LogLik(c(th1[i],th2[j]),visits,income)
}
}
which(LL==max(LL),arr.ind=TRUE)
```

Sehen Sie in der R-Hilfe die Funktion `nlm` nach. Diese stellt einen (Quasi-) Newton Algorithmus zur numerischen Minimierung zur Verfügung.

Beispiel für eine Minimierung mit der `nlm` Funktion (p bezeichnet die Startwerte)

```
f <- function(x,a)  -cos(x[1])+a*x[1]^2+(x[2]-4)^2
nlm(f, p = c(0.2,4.4), a = 0.002, hessian=TRUE )
```

(i) (3 Punkte) Wenden Sie `nlm` auf die **negative** Likelihood an. Wählen Sie dazu verschiedene Startwerte.

(j) (5 Punkte) Versuchen Sie, die Varianz-Kovarianz-Matrix der geschätzten Koeffizienten zu schätzen.

(k) (Punkte) Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem der `glm`-Funktion

```
count <- glm(visits~income, family=poisson, data=DoctorVisits)
summary(count)
```

Finden Sie eine sinnvolle Spezifikation durch die Hereinnahme weiterer erklärender Variablen. Interpretieren Sie das Ergebnis.

45. Aufgabe (30 Punkte) ML: (**Autoregressiver Prozess**)

Betrachten Sie im Folgenden einen **stationären** AR(2) Prozess

$$
\begin{aligned}
y_t &= \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + u_t, \quad t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\
u_t &\overset{\text{iid}}{\sim} N(0, \sigma^2)
\end{aligned}
$$

Die ersten beiden Autokovarianzen lassen sich mithilfe der Yule-Walker Gleichungen berechnen (siehe Davidson und MacKinnon; 2004, S. 558) und sind

$$
\begin{aligned}
\gamma_0 &= \frac{\sigma^2(1-\alpha_2)}{D} \\
\gamma_1 &= \frac{\sigma^2 \alpha_1}{D} \quad \text{mit} \quad D := (1+\alpha_2)(1+\alpha_1-\alpha_2)(1-\alpha_1-\alpha_2).
\end{aligned}
$$

(a) (5 Punkte) Sie beobachten eine Trajektorie $\{y_t\}_{t=1}^{T}$. Wie lautet die gemeinsame Dichtefunktion des y_t Prozesses? (Keine explizite Berechnung der gesamten Kovarianzmatrix nötig!) Berechnen Sie den marginalen Teil $f(y_1, y_2; \alpha_1, \alpha_2, \sigma)$ sowie für $t \geq 3$ die bedingten Dichten $f(y_t | y_{t-1}, y_{t-2}, \dots; \alpha_1, \alpha_2, \sigma)$ in Abhängigkeit der Modellparameter.

Die Dichtefunktion eines gemeinsam normalverteilten T-dimensionalen Zufallsvektors $\boldsymbol{z}$ mit $\mathrm{E}[\boldsymbol{z}] = 0$ und $\mathrm{Var}(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{\Sigma}$ lautet

$$f_z(\boldsymbol{z}) = \frac{1}{(2\pi)^{T/2}\det(\boldsymbol{\Sigma})^{1/2}}\exp(-\frac{1}{2}\boldsymbol{z}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{z}) = f(z_1, z_2)f(z_3|z_2, z_1)f(z_4|z_3, z_2, z_1)...$$

(b) (5 Punkte) Wie lautet die Log-Likelihoodfunktion $l(\alpha_1, \alpha_2, \sigma; \boldsymbol{y})$? Schreiben Sie in `R` eine Funktion, die für beliebige Parameterwerte und eine Trajektorie $\boldsymbol{y}$ die **mit -1 multiplizierte** Log-Likelihood ausgibt. Benutzen Sie **einen** Vektor für die Parameterwerte, also

```
negLogLik <- function(theta,y) ...
```

(c) (Punkte) Suchen Sie nun jährliche BIP-Wachstumsraten der Eurozone und laden Sie diese in **R**. Stellen Sie diese dar.

(d) (5 Punkte) Bereinigen Sie die Wachstumsraten um ihren Mittelwert und schätzen Sie die AR Parameter α_1, α_2 sowie σ. Benutzen Sie hierzu die `nlm` Funktion für nichtlineare Minimierung. Minimieren Sie hierbei $-l(\alpha_1, \alpha_2, \sigma; \boldsymbol{y})$. Wählen Sie geeignete Startwerte, die Sie vorher mit OLS erhalten. Achten Sie darauf, der `nlm`-Funktion auch den Datenvektor y zu übergeben.

(e) (5 Punkte) Als Option des `nlm` Befehls liefert "`hessian=TRUE`" die numerisch berechnete Hessematrix am Schätzwert. Bestimmen Sie hieraus die Varianz-Kovarianzmatrix der Parameterschätzer. Testen Sie dann die Nullhypothese $H_0: \ \alpha_2 = 0$ mittels eines Wald-Tests.

(f) (5 Punkte) Prüfen Sie diesselbe Hypothese $H_0: \ \alpha_2 = 0$ mit einem Likelihood-Ratio Test.

(g) (5 Punkte) Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit denen der `arma` Funktion sowie des OLS-Schätzers. Fertigen Sie eine Monte-Carlo-Studie an, die Verzerrung, Standardabweichung und MSE von OLS und ML miteinander vergleicht.

Literatur

Acemoglu, D., Johnson, S. & Robinson, J. A. (2001), 'The colonial origins of comparative development: An empirical investigation', *The American Economic Review* **91**, 1369–1401.

Chakroun, M. (2009), 'Health care expenditure and GDP: An international panel smooth transition approach', *Munich Personal RePEc Archive* **17559**, 1–20.
URL: *http://mpra.ub.uni-muenchen.de/17559/*

Davidson, R. & MacKinnon, J. G. (2004), *Econometric Theory and Methods*, Oxford University Press, Oxford.

Galí, J. & Gertler, M. (1999), 'Inflation dynamics: A structural econometric analysis', *Journal of Monetary Economics* **44**, 195–222.

Hansen, B. E. (2012), *Econometrics*.

McMillan, D. G. & Wohar, M. E. (2009), 'Stock return predictability and dividend-price ratio: A nonlinear approach', *International Journal of Finance and Economics* **15**, 351–365.

Nerlove, M. (1963), Returns to scale in electricity supply, *in* C. F. Christ, ed., 'Measurement in Economics - Studies in Mathematical Economics and Econometrics in Memory of Yehua Grunfeld', Stanford Univ. Press, pp. 111–126.

Romer, D. (2005), *Advanced Macroeconomics*, McGraw-Hill.